Eigenwaarden berekenen

- karakteristieke veelterm: slecht geconditioneerd probleem
- bovendriehoeksmatrix: eigenwaarden op diagonaal!
- kunnen we een willekeurige matrix transformeren tot een bovendriehoeksmatrix, op een manier waarbij de eigenwaarden niet veranderen?
- zij V een unitaire matrix en zij $A = VBV^*$, dan hebben A en B dezelfde eigenwaarden
- kunnen we een unitaire matrix V vinden zodat $A = VTV^*$ met T een bovendriehoeksmatrix?
- stelling van Galois: niet mogelijk
- we kunnen van A wel een Hessenberg matrix H maken.
- op deze H gaan we het QR-algoritme toepassen

Het QR-algoritme

Het is mogelijk om een willekeurige matrix B te ontbinden in een unitaire matrix Q en een bovendriehoeksmatrix R zodat $B = QR$. (dit kan op verschillende manieren)

Basis van het QR-algoritme:

$$Q^{(0)}R^{(0)} = H$$
$$H^{(1)} = R^{(0)}Q^{(0)}$$
$$Q^{(1)}R^{(1)} = H^{(1)}$$
$$H^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$H^{(k)} = R^{(k-1)}Q^{(k-1)}$$
$$Q^{(k)}R^{(k)} = H^{(k)}$$
$$\vdots$$

Het Arnoldi idee

- QR-algoritme toepassen op principale submatrix van H ($\rightarrow$ *Ritz-waarden*)
- dimensie van submatrix laten groeien
- H berekenen: Gram-Schmidt op $\{b, Ab, A^2, \ldots, A^{N-1}b\} \rightarrow$ kolommen van V

Het Isometrisch Arnoldi proces

- A unitair: eigenwaarden op eenheidscirkel
- submatrices aanpassen

- Ritzwaarden gescheiden door eigenwaarden
- karakteristieke veeltermen zijn *para-orthogonale* veeltermen
- minimaliseren $\|p(A)b\|$ over monische veeltermen van graad n met laagstegraadscoëfficiënt op de eenheidscirkel

Logaritmische potentiaaltheorie

zij μ een maat in het complexe vlak, dan is

$$U^{\mu}(z) = \int \log \frac{1}{|z - z'|} \, \mathrm{d}\mu(z')$$

de (logaritmische) potentiaal van μ. De energie $I(\mu)$ wordt gedefinieerd door

$$I(\mu) = \int U^{\mu}(z) \, \mathrm{d}\mu(z).$$

Een typisch probleem uit de potentiaaltheorie is: *"minimaliseer $I(\mu)$ over alle kansmaten μ met drager in K"*. De maat die dit minimum realiseert wordt de evenwichtsmaat van K genoemd, en er geldt dat haar potentiaal constant is op K.

Als p een monische veelterm is van graad n, en χ_p is de genormaliseerde nulpuntstellende maat van p,

$$\chi_p = \frac{1}{n} \sum_{\{\lambda | p(\lambda) = 0\}} \delta_{\lambda},$$

dan geldt

$$|p(z)| = \exp\bigl(-nU^{\chi_p}(z)\bigr).$$

Resultaten

Conditions

1. There exists a probability measure σ with U^σ continuous such that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_{j,N}} = \sigma.$$

2. For all sequences $(k_N)_N$ such that $\lim_{N\to\infty} \lambda_{k_N,N} = \lambda$ for some λ,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1, j\neq k}^{N} \log|\lambda_{k_N,N} - \lambda_{j,N}| = \int \log|\lambda - z| \, \mathrm{d}\sigma(z).$$

3.

$$\lim_{N\to\infty} \left(\min_{1\le k\le N} |\langle b_N, v_{k,N}\rangle| \right)^{1/N} = 1.$$

Theorem *Assume the conditions hold. Then there is a Borel probability measure* μ_t*, depending only on* t *and* σ*, such that* $\lim_{\substack{n,N\to\infty\\ n/N\to t}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\theta_{j,n,N}} = \mu_t$ *and a real constant* F_t *such that* $\lim_{\substack{n,N\to\infty\\ n/N\to t}} \|p_{n,N}(U_N)b_N\|^{1/n} = \exp(-F_t)$*. The measure* μ_t *satisfies* $0 \le t\mu_t \le \sigma, \qquad \int \mathrm{d}\mu_t = 1$ *and minimizes the logarithmic energy* $I(\mu) = \iint \log \frac{1}{|z-z'|}\,\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(z')$ *among all measures* μ *satisfying* $0 \le t\mu \le \sigma$ *and* $\int \mathrm{d}\mu = 1$*. The logarithmic potential* U^{μ_t} *of* μ_t *is a continuous function on* $\mathbb{C}$*, and the constant* F_t *is such that*

$$\begin{cases} U^{\mu_t}(z) = F_t & \textit{for } z \in \operatorname{supp}(\sigma - t\mu_t), \\ U^{\mu_t}(z) \le F_t & \textit{for } z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Furthermore, these relations characterize the pair (μ_t, F_t)*.*

Theorem *Assume the conditions hold.*

(a) For every $t \in (0,1)$ *there holds*

$$\limsup_{\substack{n,N\to\infty\\ n/N\to t}} \min_j |\lambda_{k_N,N} - \theta_{j,n,N}|^{1/n} \leq \exp\big(U^{\mu_t}(\lambda) - F_t\big)$$

for every $(\lambda_{k_N,N})_N$ *converging to some* λ.

(b) Let $I \subset \Lambda(t,\sigma)$ *be a closed arc. For every* N *there exists an exceptional index* $k^*(I,N)$ *(possibly the trivial choice* $k^*(I,N) = 0$*) such that*

$$\limsup_{\substack{n,N\to\infty\\ n/N\to t}} \min_j |\lambda_{k_N,N} - \theta_{j,n,N}|^{1/n} \leq \exp 2\big(U^{\mu_t}(\lambda) - F_t\big) < 1,$$

for every $(\lambda_{k_N,N})_N \subset I$ *converging to some* λ *and satisfying* $k_N \neq k^*(I,N)$ *for every* N.