KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN

DEPARTEMENT WISKUNDE

ONDERZOEKSGROEP ANALYSE

Subnormale operatoren

door

Steff HELSEN

Promotor :
Prof. dr. Johan Quaegebeur

Verhandeling ingediend tot het
behalen van de graad van
Licentiaat in de Wiskunde

2000-2001

Dankwoord

Ik zou graag iedereen danken die direct of indirect heeft meegeholpen aan het tot stand brengen van deze thesis. In de eerste plaats zijn dat mijn ouders. Zij hebben mij laten studeren, en hebben die studies ook gefinancierd. Ook ben ik mijn promotor Johan Quaegebeur zeer dankbaar. Niet alleen kon ik altijd bij hem terecht voor 'technische' steun, ook was hij steeds zeer enthousiast en begeesterend.

Ik ben Don Hadwin dankbaar voor de hulp die hij geboden heeft bij het uitwerken van §9. Verder wil ik nog iedereen danken die mij (zowel concreet als moreel) gesteund heeft.

S.H.

Inhoudsopgave

Inleiding

In operatorentheorie heeft men veel nuttige resultaten bekomen m.b.t. normale operatoren. Deze operatoren, die voldoen aan de op het eerste zicht ietwat vreemde eis van commuteren met hun toegevoegde, hebben veel eigenschappen die nuttig zijn gebleken. Niet enkel in het ontwikkelen van theorie, maar er zijn ook tal van toepassingen, bijvoorbeeld in de wiskundige natuurkunde. Deze normaliteitseis laat de zeer belangrijke spectrale decompositie toe. Met die spectrale decompositie kan men dan weer een functiecalculus gaan ontwikkelen, die een uitbreiding blijkt van de intuïtieve functiecalculus voor veeltermen, of de Riesz-calculus voor analytische functies. In de multipliciteitstheorie (waar overigens geen gebruik van wordt gemaakt in dit werk) heeft men de normale operatoren volledig gedissecteerd, zodat al hun geheimen ontsluierd zijn.

De logische volgende stap in de operatorentheorie is dan de operatoren onderzoeken die ‘dicht bij de normale liggen’. Zo zijn er verschillende klassen van operatoren die de notie van normaliteit uitbreiden. Er bestaan quasinormale en hyponormale operatoren, en dus ook subnormale operatoren, die hier onderzocht worden. De quasi- en de hyponormale operatoren worden echter niet achterwege gelaten. De naamgeving van deze operatoren is niet bijzonder suggestief (‘sub’ en ‘hypo’ betekenen allebei ‘onder’), maar deze is historisch zo gegroeid, en wordt algemeen gebruikt.

Subnormale operatoren zijn ingevoerd in 1950 door Paul Halmos in [21]. Enkele nuttige (en belangrijke) eigenschappen werden daarin al aangetoond. Joseph Bram verfijnde in [4] enkele resultaten, en bewees er een heel aantal nieuwe. Dit is dan ook het eerste standaardwerk over subnormale operatoren. John Conway heeft meer recente werken geschreven die vele eigenschappen van subnormale operatoren bundelen [7, 8]. Deze had ik echter niet ter beschikking. Hedendaags onderzoek naar subnormale operatoren wordt gedaan door (o.a.) John Conway, Donald Hadwin, Nathan Feldman, Robert Olin, Jim Agler, John McCarthy, Liming Yang, Alexandru Aleman, Jan Stochel, Karol Rudol. Zie bijvoorbeeld [1, 2, 10, 16, 17, 19, 26, 28, 32, 35]. (Deze artikels zijn niet gebruikt voor dit werk, ze zijn slechts opgenomen in de bibliografie voor de geïnteresseerde lezer)

De theorie van de subnormale operatoren heeft vele wortels in de complexe analyse. Hoewel hier eerder de operatortheoretische aanpak is gevolgd, zal dit toch voldoende duidelijk worden. In dit werk zijn verschillende karakterisaties van subnormale operatoren terug te vinden. Er is (natuurlijk) het Halmos-Bram criterium, dat al van 1955 stamt. Ook is er een karakterisatie in functie van semispectrale maten, die natuurlijk zijn idee vindt in de spectrale decompositie voor normale operatoren. Er wordt ook een functiecalculus ontwikkeld voor subnormale operatoren, weerom door gebruik te maken van de al bekende functiecalculus voor normale operatoren. Verder zijn er nog twee merkwaardige resultaten. In sectie 9 wordt nog een andere karakterisatie bewezen, er wordt een topologisch verband gegeven tussen de normale en de subnormale operatoren. In sectie 10 worden de Putnam- en de Berger-Shaw-ongelijkheden bewezen, die een verband geven tussen de norm resp. het spoor van de zelfcommutator van een operator en de Lebesguemaat van het spectrum van die operator.

In de benaderingstheorie hebben subnormale operatoren ook een praktische betekenis gekregen (die hier echter niet behandeld wordt; zie hiervoor bijvoorbeeld [12]). Het onderzoek naar de subnormale operatoren is een steeds groeiende tak van de operatorentheorie, zodat waarschijnlijk nog veel meer nuttige toepassingen gevonden zullen worden.

Voorbeschouwingen

In deze voorbeschouwingen worden notaties ingevoerd en enkele noodzakelijke begrippen uit de operatorentheorie vermeld. De meeste dingen worden niet bewezen. De bewijzen zijn te vinden in [30] voor sectie 2-4, en sectie 5 is terug te vinden in [6]. Voor de maattheoretische aspecten kan je terecht in [29].

1. Notaties en afspraken

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ zijn de ruimtes van de natuurlijke, gehele, rationale, reële en complexe getallen respectievelijk. De complex toegevoegde van $z \in \mathbb{C}$ noteren we met $\bar{z}$, zo ook is $\bar{f}$ de complex toegevoegde functie van f. De sluiting van een verzameling Δ wordt ook genoteerd met $\bar{\Delta}$, de verzameling van complex toegevoegde elementen is dan Δ^*.

Een Hilbertruimte is een vectorruimte over de complexe getallen, uitgerust met een scalair product $\langle . , . \rangle$ (afspraak: $\langle . , . \rangle$ is lineair in het eerste lid, antilineair in het tweede), die volledig is m.b.t. dat scalair product en gesloten t.o.v. de topologie geïnduceerd door de norm $\|\xi\| = \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$. Hilbertruimtes worden aangeduid met $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$ en worden separabel verondersteld (hoewel dit niet altijd noodzakelijk is; sommige voorbeelden maken dan ook gebruik van niet-separable Hilbertruimten). Typische elementen hiervan zijn ξ en η. $B(0, r)$ is de open bol met straal r: $B(0, r) = \{\xi \in \mathfrak{H} | \ \|\xi\| < r\}$. Zij $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$, met $\bigvee \mathfrak{M}$ bedoelen we de kleinste deelruimte van $\mathfrak{H}$ die $\mathfrak{M}$ bevat. Dit is de afsluiting (in de normtopologie) van alle eindige lineaire combinaties van elementen in $\mathfrak{M}$.

Operatoren zijn begrensde lineaire afbeeldingen tussen twee Hilbertruimtes, en worden voorgesteld door $A, B, \ldots$ (op één plaats zullen ook onbegrensde afbeeldingen toegelaten worden, maar dit wordt daar duidelijk gemaakt). $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is de verzameling van alle begrensde operatoren van een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ naar zichzelf. De beperking van een operator A op $\mathfrak{K}$ tot de deelruimte $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$ wordt genoteerd met $A|_{\mathfrak{H}}$ (dit is dus een operator van $\mathfrak{H}$ naar $\mathfrak{K}$). De toegevoegde van een operator A wordt voorgesteld door A^*, en is gedefinieerd door $\langle A\xi, \eta \rangle = \langle \xi, A^*\eta \rangle$ voor alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$. Enkele speciale soorten operatoren:

- zelftoegevoegde operatoren: $A = A^*$
- idempotente operatoren: $A^2 = A$

- projecties: idempotente zelftoegevoegde operatoren
- unitaire operatoren: $U^*U = UU^* = \mathbb{1}$
- normale operatoren: $N^*N = NN^*$
- isometrieën: $V^*V = \mathbb{1}$

Twee operatoren A, B noemt men unitair equivalent (notatie: $A \cong B$) *asa* er een unitaire U bestaat zodat $UAU^* = B$.

Voor een operator A is $C^*(A)$ de kleinste unitale C^*-algebra die A omvat: dit is de sluiting (in de normtopologie) van de polynomen in twee variabelen, in A en A^*.

De commutator $[A, B]$ van twee operatoren is de operator $AB - BA$; de zelfcommutator van een operator A is $[A^*, A]$, en wordt soms voorgesteld door D_A (of als duidelijk is welke operator bedoeld wordt, gewoon D).

Een norm op $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ wordt geleverd door $\|A\| = \sup_{\xi \in \mathfrak{H}} \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|}$. We beschouwen op $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ drie topologieën: de normtopologie (de zwakste topologie waarvoor $A \mapsto \|A\|$ continu is), de sterke operator topologie (de zwakste topologie waarvoor $A \mapsto A\xi$ continu is, voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$) en de zwakke operatortopologie (de zwakste topologie waarvoor $A \mapsto \langle A\xi, \eta \rangle$ continu is, voor elke $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$).

μ wordt meestal gebruikt om een Borelmaat op $\mathbb{C}$ voor te stellen. Voor een meetbare functie f noteren we

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \in [0, +\infty] |\ \mu(\{z \in \mathbb{C}|\ f(z) > M\}) = 0\}.$$

$L^\infty(\mu)$ is dan de verzameling van alle meetbare complexe functies f waarvoor $\|f\|_\infty$ eindig is, uitgedeeld naar de equivalentierelatie

$$f \equiv g \quad \underline{asa} \quad \mu(\{z \in \mathbb{C}|\ f(z) \neq g(z)\}) = 0.$$

$L^2(\mu)$ is de ruimte van meetbare functies waarvoor $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\mu(z)$ eindig is, uitgedeeld naar dezelfde equivalentierelatie als hierboven.

Zij $K \subset \mathbb{C}$ een compact. $C(K)$ is de ruimte der continue functies op K. $Rat(K)$ is de verzameling der rationale functies met polen buiten K. De uniforme sluiting hiervan in $C(K)$ wordt genoteerd met $R(K)$. Zij μ een Borelmaat met compacte drager K, dan is $R^2(\mu)$ de $L^2(\mu)$-sluiting van $Rat(K)$. $P^2(\mu)$ is de afsluiting van de polynomen in een veranderlijke in $L^2(\mu)$.

$\ell^2(\mathbb{N})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ zijn de kwadratisch sommeerbare rijen met indices in $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$ en elementen in $\mathbb{C}$. Voor een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ is $\mathfrak{H}^{(\infty)}$ de ruimte der kwadratisch sommeerbare rijen (hiermee wordt bedoeld dat de normen kwadratisch sommeerbaar zijn) van elementen in $\mathfrak{H}$, met indices in $\mathbb{N}$. Als A een operator is op $\mathfrak{H}$, dan is $A^{(\infty)}$ de operator die op elk element van de rij A toepast.

2. Het spectrum

Een operator A is inverteerbaar als er een operator B bestaat zodat $AB = BA = \mathbb{1}$. B wordt dan genoteerd met A^{-1}. Het spectrum van een operator A is dan als volgt gedefinieerd:

$$\sigma(A) \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{C} |\ (A - \lambda\mathbb{1}) \text{ is niet inverteerbaar}\}.$$

2.1 Eigenschap

Het spectrum van een operator is een niet-lege compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$.

Nu kan men gaan onderzoeken op welke manier elementen $\lambda \in \mathbb{C}$ terecht kunnen komen in $\sigma(A)$. Dit leidt dan tot een opsplitsing van het spectrum. Een mogelijke opsplitsing, die wordt gebruikt in [30], is:

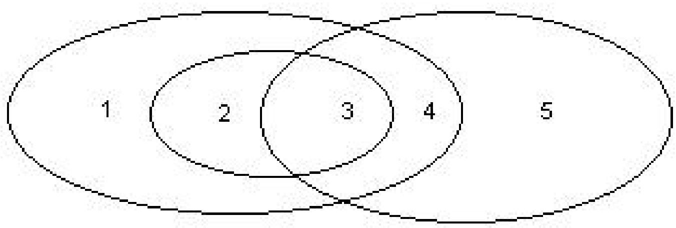
- $P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ (A - \lambda\mathbb{1}) \text{ niet injectief}\}$
- $C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ (A - \lambda\mathbb{1}) \text{ injectief, niet surjectief, } \overline{\mathrm{Ran}\,(A - \lambda\mathbb{1})} = \mathfrak{H}\}$
- $R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ (A - \lambda\mathbb{1}) \text{ injectief, niet surjectief, } \overline{\mathrm{Ran}\,(A - \lambda\mathbb{1})} \neq \mathfrak{H}\}$,

dewelke elk element van $\sigma(A)$ bereikt omdat $A - \lambda\mathbb{1}$ inverteerbaar is <u>*asa*</u> $A - \lambda\mathbb{1}$ injectief én surjectief is. De deelverzamelingen noemen dan resp. het puntspectrum, het continu spectrum en het residuaal spectrum.

Een andere onderverdeling van het spectrum is:

- $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \exists \xi \in \mathfrak{H} :\ A\xi = \lambda\xi\}$
- $\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ (A - \lambda\mathbb{1}) \text{ is niet langs onder begrensd}\}$
  (*een operator B noemt men langs onder begrensd als* $0 < \inf\{\|B\xi\|;\ \xi \in \mathfrak{H}\}$)
- $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \overline{\mathrm{Ran}\,(A - \lambda\mathbb{1})} \neq \mathfrak{H}\}$.

Hier noemt men de deelverzamelingen het puntspectrum, het benaderend puntspectrum en het compressiespectrum. Het grootste verschil is dat de verzamelingen in de eerste verdeling disjunct zijn, en in de laatste niet. We kunnen dit als volgt voorstellen:



Er geldt:

$$\begin{array}{rcl} P\sigma(A) = & 2 \cup 3 & = \sigma_p(A) \\ C\sigma(A) = 1 & \subseteq & \sigma_{ap}(A) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \\ R\sigma(A) = 4 \cup 5 & \subseteq & \sigma_c(A) = 3 \cup 4 \cup 5 \end{array}$$

Er zal voornamelijk met de tweede ontbinding gewerkt worden, hoewel de eerste ook wel ter sprake komt.

2.2 Eigenschap

- *Voor elke operator A geldt $\sigma(A) \subseteq \overline{B(0, \|A\|)}$.*
- *Als A unitair is, is $\sigma(A) \subseteq \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} | \ |\lambda| = 1\}$.*
- *Als A zelftoegevoegd is, is $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*
- *Als A een projectie is, is $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$.*

Er is nog een speciaal type van operator: positieve operatoren. Men noemt een operator A positief als A zelftoegevoegd is, en $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$ (notatie: $A \geqslant 0$). Enkele eigenschappen van dit soort operator:

2.3 Eigenschap

- *Een operator A is positief*
  <u>asa</u> er bestaat een zelftoegevoegde operator B zodat $A = B^2$
  <u>asa</u> er bestaat een operator C zodat $A = C^*C$.
- *Een operator A is positief <u>asa</u> $\langle A\xi, \xi \rangle \geqslant 0$ voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$.*
- *Zij A een positieve operator, dan bestaat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een positieve operator B zodat $B^n = A$ (notatie: $B = A^{1/n}$).*

Men kan op de zelftoegevoegde operatoren een partiële orderelatie definiëren door $A \geqslant B$ <u>asa</u> $A - B \geqslant 0$.

Ook bestaat er voor elke operator A een unieke ontbinding $A = B + iC$, met B en C positieve operatoren. Men noemt dit de cartesiaanse ontbinding.

Een ander object dat men aan het spectrum van een operator A kan hechten is de spectrale straal $r(A)$: dit is de kleinste straal van een bol met middelpunt 0 die het spectrum omvat. Anders gezegd: $r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \{|\lambda|\}$.

2.4 Eigenschap

$r(A) = \lim_n \|A^n\|^{1/n}$

Voor een normale operator N kan men eenvoudig nagaan dat $\|N^n\| = \|N\|^n$ voor elk natuurlijk getal n, zodat $r(N) = \|N\|$. Een interessante eigenschap van het spectrum van een normale operator is ook:

2.5 Stelling (Criterium van Weyl)

Zij N een normale operator, dan is $\sigma(N) = \sigma_{ap}(N)$.

Een minder bekende eigenschap van het spectrum is:

2.6 Eigenschap [22]

Zij A een operator. De rand van $\sigma(A)$ is een deel van $\sigma_{ap}(A)$.

BEWIJS :
Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ op de rand van $\sigma(A)$. Dan bestaat er een rij $(\lambda_n)_n \notin \sigma(A)$ die convergeert naar λ. Noem $B_n = A - \lambda_n \mathbb{1}$ voor elke n en $B = A - \lambda \mathbb{1}$. Merk op dat elke B_n inverteerbaar is, maar B niet. Er geldt $\|B_n - B\| = |\lambda_n - \lambda| \to 0$. B is niet inverteerbaar, dus $0 \in \sigma_{ap}(B)$ of $0 \in \sigma_c(B)$. We moeten dus nog bewijzen dat $0 \in \sigma_c(B) \Rightarrow 0 \in \sigma_{ap}(B)$, of anders uitgedrukt, dat uit $\overline{\operatorname{Ran} B} \subsetneq \mathfrak{H}$ volgt dat B niet langs onder begrensd is.

Stel dus nu $0 \neq \xi \in (\operatorname{Ran} B)^\perp$. Noem $\xi_n = \frac{B_n^{-1}\xi}{\|B_n^{-1}\xi\|}$. Dan is $\|\xi_n\| = 1$ zodat $\|(B_n - B)\xi_n\| \leqslant \|B_n - B\| \to 0$. Nu is echter $B\xi_n \in \operatorname{Ran} B$ en $B_n\xi_n \perp \operatorname{Ran} B$, zodat

$$\|B_n\xi_n - B\xi_n\|^2 = \|B_n\xi_n\|^2 + \|B\xi_n\|^2 \geqslant \|B\xi_n\|^2,$$

dus $(\xi_n)_n$ is een rij eenheidsvectoren zodat $\|B\xi_n\| \to 0$. B is dus niet langs onder begrensd. ∎

3. De spectrale decompositie

3.1 Definitie

Zij $(X, \mathfrak{M})$ een meetbare ruimte. Een spectrale maat E voor een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ is een afbeelding van $\mathfrak{M}$ naar $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat:

- Voor elke $\Delta \in \mathfrak{M}$ is $E(\Delta)$ een projectie.

- $E(\emptyset) = 0$ en $E(X) = \mathbb{1}$.
- $E(\Delta \cap \Lambda) = E(\Delta)E(\Lambda)$ voor alle $\Delta, \Lambda \in \mathfrak{M}$.
- Voor elke rij $(\Delta_n)_n$ van twee aan twee disjuncte verzamelingen in $\mathfrak{M}$ is $E\left(\bigcup_n \Delta_n\right) = \sum_n E(\Delta_n)$.

▲

Als E een spectrale maat is, dan kan men nagaan dat $\langle E(.)\xi, \eta\rangle$ een Borelmaat is, voor elke $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$.

De bedoeling van een maat is om te kunnen integreren. Men kan dan ook voor alle begrensde functies $f : X \to \mathbb{C}$ de operator $\int_X f\, dE$ definiëren. De details zijn te vinden in [30]. De afbeelding van de begrensde complexe functies op X naar de operatoren op $\mathfrak{H}$ die een functie afbeeldt op zijn integraal t.o.v. een (vaste) spectrale maat, is een *-homomorfisme.

We noteren met z de identieke functie op $\mathbb{C}$. Een diep resultaat voor normale operatoren is:

3.2 Stelling

Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een normale operator. Dan bestaat er een unieke spectrale maat E op de Borelverzamelingen van $\sigma(N)$ zodat

$$N = \int_{\sigma(N)} z\, dE(z).$$

Bovendien geldt $E(\Delta) \neq 0$ als Δ een niet-lege open deelverzameling van $\sigma(N)$ is. Ook geldt voor elke operator $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$: $[N, A] = 0$ asa $[E(\Delta), A] = 0$ voor elke Borelverzameling Δ.

We noemen $N = \int_{\sigma(N)} z\, dE(z)$ de spectrale decompositie van N. Merk op dat voor een spectrale maat E de operator $\int z\, dE(z)$ steeds normaal is, zodat er een bijectie bestaat tussen de spectrale maten en de normale operatoren.

Zij nu E de spectrale maat voor een normale operator N. We noemen een complexe maat μ een scalaire spectrale maat voor N als $\mu(\Delta) = 0$ asa $E(\Delta) = 0$ voor elke Borelverzameling Δ. Dit begrip zullen we later nog nodig hebben.

4. Een functiecalculus

De bedoeling is om voor complexe functies f op $\mathbb{C}$ ook $f(A)$ te kunnen definiëren, waarbij A een operator is op een zekere Hilbertruimte. Men maakt hiervoor gebruik van de integraalformule van Cauchy en van vectorwaardige integratie. Opnieuw vermeld ik alleen het resultaat, de technische details zijn terug te vinden in [30].

Zij A een operator op $\mathfrak{H}$. Voor alle functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die analytisch zijn op een open dat $\sigma(A)$ omvat, definiëren we $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z\mathbb{1} - A)^{-1}\, dz$, waarbij γ een positief georiënteerd systeem van gesloten krommen is, in het analyticiteitsdomein van f, die $\sigma(A)$ omsluiten.

De afbeelding die een functie f afstuurt op $f(A)$ voor een vaste operator A is de Riesz-calculus, met als eigenschappen dat $1(A) = \mathbb{1}$ en $z(A) = A$, waarbij 1 de constante functie is die alles afstuurt op 1, en z de identieke functie op $\mathbb{C}$. Een belangrijke eigenschap van deze calculus is het 'spectral mapping theorem': $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Voor een normale operator kunnen we verder gaan: we kunnen voor elke begrensde functie f op $\sigma(N)$, $f(N)$ definiëren als $f(N) = \int_{\sigma(N)} f\, dE$, waarbij E de spectrale maat voor N is. Men noemt dit de Borelcalculus. Deze is een uitbreiding van de Riesz-calculus (d.w.z. voor analytische functies komen de twee definities op hetzelfde neer).

Enkele eigenschappen van deze Borelcalculus:

- $\|f(N)\| \leqslant \|f\|$, waarbij we de supnorm op $\sigma(N)$ bedoelen.
- Als f continu is, geldt zelfs $\|f(N)\| = \|f\|$.
- Zij $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $[N, A] = 0$, dan zal ook $[f(N), A] = 0$.
- Zij E de spectrale maat voor N;
  $f(N) = g(N)$ <u>*asa*</u> $f = g$ E-b.o., d.w.z. $E(\{\lambda \in \sigma(N) |\ f(\lambda) \neq g(\lambda)\}) = 0$.
- $\sigma(f(N)) = \Re_E(f) := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \forall \epsilon > 0 : \ E(f^{-1}(B(\lambda, \epsilon))) \neq 0\}$.

5. Cycliciteit

5.1 Definitie

- Men noemt een vector $\xi \in \mathfrak{H}$ een *-cyclische vector voor $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ als
$$\mathfrak{H} = \overline{\{B\xi |\ B \in C^*(A)\}}.$$
- Men noemt een vector $\xi \in \mathfrak{H}$ een cyclische vector voor $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ als
$$\mathfrak{H} = \bigvee \{A^k\xi |\ k \in \mathbb{N}\}.$$

A noemt men dan een (*-)cyclische operator. ▲

5.2 Eigenschap

*Elke operator $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is de directe som van *-cyclische operatoren.*

Bewijs :
Zij ξ een vector in $\mathfrak{H}$ en zij $\mathfrak{H}_\xi = \overline{\{B\xi \mid B \in C^*(A)\}}$. Kies nu een vector η in $\mathfrak{H}_\xi^\perp$, dan is ook $A\eta \in \mathfrak{H}_\xi^\perp$. Immers, voor elke $B \in C^*(A)$ is $\langle B\xi, A\eta\rangle = \langle A^*B\xi, \eta\rangle = 0$, omdat $A^*B \in C^*(A)$. Ook zal $A\mathfrak{H}_\xi \subseteq \mathfrak{H}_\xi$, zodat $A = A|_{\mathfrak{H}_\xi} \oplus A|_{\mathfrak{H}_\xi^\perp}$. $A_{\mathfrak{H}_\xi}$ is dus een *-cyclische operator op $\mathfrak{H}_\xi$. We noemen nu twee vectoren $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ *-orthogonaal als $\xi \in \mathfrak{H}_\eta^\perp$ (of equivalent $\eta \in \mathfrak{H}_\xi^\perp$). Er bestaat dan een verzameling van 2 aan 2 *-orthogonale vectoren $\mathcal{V}$ die heel $\mathfrak{H}$ genereren (d.w.z. $\overline{C^*(A)\mathcal{V}} = \mathfrak{H}$). Dit is een eenvoudige toepassing van het lemma van Zorn:

> Zij X de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathfrak{H}$ waarvan de elementen 2 aan 2 *-orthogonaal zijn. We ordenen deze verzameling door inclusie $\subseteq$. Bekijk nu een keten K in X. Dan is $G = \bigcup_{H \in K} H$ een bovengrens van K. Inderdaad, neem twee vectoren ξ en η in G. Dan bestaan er verzamelingen H_1 en H_2 in K zodat $\xi \in \mathfrak{H}_1$ en $\eta \in \mathfrak{H}_2$. Omdat K een keten is zal $H_1 \subseteq H_2$ of $H_2 \subseteq H_1$. Er bestaat dus een $H \in X$ met $\xi, \eta \in H$, dus ξ en η zijn *-orthogonaal. En duidelijk zal ook voor elke $H \in K$, $H \subseteq G$. Dus X heeft een maximaal element $\mathcal{V}$. Nu moet $\mathcal{V}$ wel $\mathfrak{H}$ genereren, omdat anders $\mathcal{V}$ niet maximaal zou zijn.

Nu is dus $A = \oplus_{\xi \in \mathcal{V}} A|_{\mathfrak{H}_\xi}$, met elke term hierin *-cyclisch. ∎

Zij $\mathcal{B}(\mathfrak{H}) = L^2(\mu)$ met μ een zekere Borelmaat met compacte drager. Men noteert met N_μ de normale operator: $N_\mu : \quad f \mapsto zf$. Het is duidelijk dat deze operator *-cyclisch is. Immers, 1 is een *-cyclische vector, omdat elke kwadratisch integreerbare functie te benaderen is door veeltermen in twee veranderlijken z en $\bar{z}$. Door volgende stelling is elke *-cyclische normale operator van die vorm:

5.3 Stelling

*Een normale operator N is *-cyclisch asa N unitair equivalent is met N_μ voor een zekere Borelmaat μ op $\mathbb{C}$ met compacte drager. Als ξ een *-cyclische vector is voor N, dan kan μ gekozen worden zodat er een isomorfisme $V : \mathfrak{H} \to L^2(\mu)$ bestaat met $V\xi = 1$ en $VNV^{-1} = N_\mu$. Onder deze voorwaarden is V uniek.*

Zij N een normale operator met spectrale maat E. Als ξ een *-cyclische vector is voor N, dan is $\mu(.) = \langle E(.)\xi, \xi\rangle$ een scalaire spectrale maat voor N. Inderdaad, als $E(\Delta) = 0$, dan is ook $\mu(\Delta) = 0$. Omgekeerd, als $\mu(\Delta) = 0$, dan is $E(\Delta)\xi = 0$. Maar $E(\Delta)$ commuteert met N en N^*, dus met elke operator in $C^*(N)$. Maar dan is voor elke $A \in C^*(N)$, $0 = AE(\Delta)\xi = E(\Delta)A\xi$. Omdat ξ nu een *-cyclische vector is voor N, is $E(\Delta) = 0$ op heel $\mathfrak{H}$, dus $E(\Delta) = 0$. Deze maat μ noemen we 'de scalaire spectrale maat voor N horende bij ξ'.

§ 1 Definities en eigenschappen

Deze paragraaf bevat enkele basisbegrippen, die terug te vinden zijn in [22, 25]

1.1 Definitie

Een operator S op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ wordt subnormaal genoemd als er een Hilbertruimte $\mathfrak{K}$ bestaat die $\mathfrak{H}$ bevat, en een normale operator N op $\mathfrak{K}$ zodat $N\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ en $N|_{\mathfrak{H}} = S$ (m.a.w. een subnormale operator S is de beperking van een normale operator N op $\mathfrak{K}$ tot de invariante deelruimte $\mathfrak{H}$). ▲

1.2 Definitie

Een operator T is hyponormaal <u>*asa*</u> $T^*T \geqslant TT^*$. ▲

Equivalent: Een operator T is hyponormaal <u>*asa*</u> $[T^*, T] \geqslant 0$.

In het vervolg gaan deze notaties trouwens gebruikt worden: een subnormale S, op $\mathfrak{H}$, met een normale uitbreiding N op $\mathfrak{K}$ en een hyponormale T (op $\mathfrak{H}$).

Hyponormale operatoren zijn nuttig in de studie van subnormale operatoren, omdat elke subnormale operator hyponormaal zal blijken te zijn (dit wordt verderop bewezen).

Eerst het typevoorbeeld van een subnormale operator:

1.3 Voorbeeld

Neem $\mathfrak{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ en U_+ de verschuiving naar rechts; d.w.z. $U_+(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. U_+^* is dan de verschuiving naar links: $U_+^*(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$ Het is duidelijk dat $U_+^*U_+ = \mathbb{1}$, terwijl $U_+U_+^*$ een projectie is die de eerste component annihileert: $U_+U_+^*(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_2, a_3, \ldots)$. U_+ is dus duidelijk niet-normaal hyponormaal. Bekijk $\mathfrak{K} = \ell^2(\mathbb{Z})$ en U_+^- weer de verschuiving naar rechts. Dan is U_+^- een normale uitbreiding van U_+, dus U_+ is ook subnormaal. ★

Meer voorbeelden worden in de volgende paragraaf gegeven. In deze paragraaf gaan we een beetje dieper in op deze operatoren. Eerst een alternatieve karakterisatie van de hyponormale operatoren:

1.4 Lemma

Een operator T (op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$) is hyponormaal asa $\|T^*\xi\| \leqslant \|T\xi\|$ voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$.

Bewijs :

$$\begin{aligned} T^*T \geqslant TT^* &\Leftrightarrow \langle T^*T\xi, \xi\rangle \geqslant \langle TT^*\xi, \xi\rangle \quad \text{voor alle } \xi \in \mathfrak{H} \\ &\Leftrightarrow \langle T\xi, T\xi\rangle \geqslant \langle T^*\xi, T^*\xi\rangle \quad \text{voor alle } \xi \in \mathfrak{H} \\ &\Leftrightarrow \|T\xi\|^2 \geqslant \|T^*\xi\|^2 \quad \text{voor alle } \xi \in \mathfrak{H} \end{aligned}$$

∎

1.5 Definitie

Gegeven een operator B op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$. We noemen een deelruimte $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}$ een invariante deelruimte voor B als $B\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$. Een deelruimte $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{H}$ is een reducerende deelruimte voor B als zowel $\mathcal{E}$ als $\mathcal{E}^\perp$ invariante deelruimten zijn voor B. ▲

Zij $\mathfrak{D}$ een deelruimte van $\mathfrak{H}$. We kunnen $\mathfrak{H}$ schrijven als $\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^\perp$, en overeenkomstig de operatoren op $\mathfrak{H}$ schrijven als 2×2-matrices. $\mathfrak{D}$ is dan invariant voor B asa de zuidwestcomponent van de decompositie B 0 is en $\mathfrak{D}$ is reducerend asa B splitst in een diagonaalmatrix.

Merk op dat de tweede eis van een reducerende deelruimte ($\mathcal{E}^\perp$ invariant voor B) equivalent is met de eis dat $\mathcal{E}$ invariant is voor B^*: $\forall \xi \in \mathcal{E}$ en $\forall \eta \in \mathcal{E}^\perp$ geldt: $\langle B^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, B\eta\rangle$, of kijk naar de matrixdecompositie hierboven.

De ruimte $\mathfrak{H}$ waarop een subnormale operator S werkt is dus een invariante deelruimte voor de normale uitbreiding N. Als $\mathfrak{H}$ nu ook een reducerende deelruimte blijkt te zijn, dan is S zelf ook normaal:

$$\begin{aligned} \langle S^*S\xi, \eta\rangle &= \langle S\xi, S\eta\rangle = \langle N\xi, N\eta\rangle = \langle N^*N\xi, \eta\rangle = \langle NN^*\xi, \eta\rangle = \langle SN^*\xi, \eta\rangle \\ &= \langle N^*\xi, S^*\eta\rangle = \langle \xi, NS^*\eta\rangle = \langle \xi, SS^*\eta\rangle = \langle S^*\xi, S^*\eta\rangle = \langle SS^*\xi, \eta\rangle, \end{aligned}$$

voor alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, dus is $S^*S = SS^*$.

De omgekeerde bewering is ook waar: als de beperking S van een normale operator N op een Hilbertruimte $\mathfrak{K}$ tot een invariante deelruimte $\mathfrak{H}$ terug normaal is, dan is $\mathfrak{H}$ een reducerende deelruimte van $\mathfrak{K}$ voor N: omdat we weten dat $N|_{\mathfrak{H}} = S$, zal de noordwest-component gelijk zijn aan S, dus

$$N = \begin{pmatrix} S & F \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

voor zekere operatoren F en G. Dan zal

$$N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ F^* & G^* \end{pmatrix}.$$

N is normaal, dus

$$\begin{aligned} 0 &= N^*N - NN^* \\ &= \begin{pmatrix} S^*S & S^*F \\ F^*S & F^*F + G^*G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^* + FF^* & FG^* \\ GF^* & GG^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

dus $0 = S^*S - SS^* - FF^* \;\Rightarrow\; FF^* = 0 \;\Rightarrow\; F = 0$. Dus de matrixdecompositie van N is diagonaal, dus $\mathfrak{H}$ is een reducerende deelruimte.

We kunnen in het resultaat hierboven de normaliteitsvoorwaarde afzwakken tot die voor hyponormaliteit; dan krijgen we $FF^* \leqslant 0$, maar ook geldt $FF^* \geqslant 0$, dus de conclusie is dezelfde:

1.6 Lemma

Zij T een hyponormale operator op $\mathfrak{H}$, en zij $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ een invariante deelruimte voor T, zodat $T|_{\mathfrak{M}}$ normaal is, dan is $\mathfrak{M}$ een reducerende deelruimte.

Als we de berekening hierboven beter bekijken, vinden we volgende eigenschap:

1.7 Eigenschap

Elke subnormale operator is hyponormaal.

Bewijs :
Uit berekening (1) leren we $S^*S - SS^* = FF^* \;\Rightarrow\; S^*S - SS^* \geqslant 0$ ∎

Elke eigenschap van hyponormale operatoren geldt dus ook voor een subnormale operator. Soms bestaan er echter aparte bewijzen, en uit overtuiging dat die het inzicht verhogen, worden die hier meestal beide gegeven.

In de volgende paragraaf zullen we een voorbeeld zien van een hyponormale operator die niet subnormaal is, dus er is een strikte inclusie tussen de twee klassen.

Het is onmiddellijk duidelijk dat de beperking van een subnormale operator tot een invariante deelruimte terug subnormaal is (de oorspronkelijke normale uitbreiding kan nog altijd dienst doen). Die eigenschap geldt ook voor hyponormale operatoren.

1.8 Eigenschap

Zij T een hyponormale operator en zij $\mathfrak{M}$ een invariante deelruimte voor T. Dan is $T|_{\mathfrak{M}}$ ook hyponormaal.

BEWIJS :
Zij $R = T|_{\mathfrak{M}}$ en zij P de projectie van $\mathfrak{H}$ op $\mathfrak{M}$ en zij $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$.

$$\langle R^*\xi, \eta\rangle \;=\; \langle \xi, R\eta\rangle \;=\; \langle \xi, T\eta\rangle \;=\; \langle T^*\xi, \eta\rangle \;=\; \langle T^*\xi, P\eta\rangle \;=\; \langle PT^*\xi, \eta\rangle,$$

dus geldt $R^* = PT^*|_{\mathfrak{M}}$, zodat $\|R^*\xi\| \leqslant \|T^*\xi\| \leqslant \|T\xi\| = \|R\xi\|$, voor alle $\xi \in \mathfrak{M}$. ∎

OPMERKING:
Hieruit volgt nog eens dat een subnormale operator hyponormaal is, immers een normale operator is (natuurlijk) ook hyponormaal.

Volgende eigenschap zegt ons dat de notie sub- en hyponormaal slechts zinvol is op ∞-dimensionale ruimten:

1.9 Eigenschap

Een hyponormale operator op een eindig-dimensionale ruimte is normaal.

BEWIJS :
Zij T een hyponormale operator op de eindigdimensionale ruimte $\mathfrak{H}$. Een operator op een eindig-dimensionale ruimte is niets anders dan een matrix. We weten dat een zelftoegevoegde matrix diagonaliseerbaar is. Kies dus een orthogonale basis van $\mathfrak{H}$ zodat $D_T := T^*T - TT^*$ een diagonaalmatrix is. D_T is positief, dus zijn diagonaal bestaat enkel uit positieve getallen. De afbeelding $M \mapsto Tr(M)$, die een matrix afbeeldt op zijn spoor (de som van de diagonaalelementen) heeft als eigenschap dat

$Tr(AB) = Tr(BA)$, voor alle vierkante matrices A, B , dus vinden we eenvoudig dat $Tr(D_T) = 0$. Dus $D_T = 0$, en T is normaal. ∎

BEWIJS in het subnormale geval:
In dit geval kunnen we gebruik maken van de volgende eigenschap:

elke eindig-dimensionale invariante deelruimte van een normale operator N reduceert N.

Aangezien op een eindig-dimensionale ruimte elke operator een eigenwaarde heeft, is het voldoende te bewijzen dat elke eigenruimte van N, N reduceert. Dit is eenvoudig: immers elke eigenvector ξ van N is ook een eigenvector van N^*. ($\|(N-\lambda)\xi\| = \|(N^*-\bar{\lambda})\xi\|$) ∎

Een normale uitbreiding van een subnormale operator is natuurlijk niet uniek. Zij N immers een normale uitbreiding van S (op resp. $\mathfrak{K}$ en $\mathfrak{H}$), en zij M een normale operator op $\mathcal{L}$. Dan is $N \oplus M$ (op $\mathfrak{K} \oplus \mathcal{L}$) ook een normale uitbreiding van S.

1.10 Definitie

We noemen $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ een minimale normale uitbreiding van $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ als er geen reducerende deelruimte voor N tussen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$ ligt. Met andere woorden: N is een minimale normale uitbreiding van S als $\mathfrak{K}$ de enige reducerende deelruimte voor N is, die $\mathfrak{H}$ omvat. ▲

1.11 Eigenschap

Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ een normale uitbreiding van $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, dan is N minimaal asa $\mathfrak{K} = \bigvee\{N^{*k}\xi | \xi \in \mathfrak{H}, k \in \mathbb{N}\}$.

BEWIJS :
$\mathfrak{K} = \bigvee\{N^{*k}\xi | \xi \in \mathfrak{H}, k \in \mathbb{N}\}$ is duidelijk een reducerende deelruimte voor N. Het is ook duidelijk dat deze ruimte $\mathfrak{H}$ bevat. Verder moet elke reducerende deelruimte voor N, die $\mathfrak{H}$ omvat, ook deze ruimte omvatten. ∎

OPMERKING:
Hieruit volgt dat $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$ gelijkmachtig zijn. Immers als $\mathfrak{H}$ eindigdimensionaal is, is S normaal en is dus $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$. Als $\mathfrak{H}$ aftelbaar is, zal wegens bovenstaande eigenschap $\mathfrak{K}$ ook aftelbaar zijn. Dit geldt natuurlijk ook voor elke grotere kardinaliteit.

1.12 Voorbeeld

Voor de eenzijdige shift U_+ uit voorbeeld 1.3 is de tweezijdige shift U_+^- een minimale normale uitbreiding. ★

Wegens volgende eigenschap is het gerechtvaardigd van te spreken van *de* minimale normale uitbreiding.

1.13 Eigenschap

Als N_1 en N_2 (op $\mathfrak{K}_1$ en $\mathfrak{K}_2$) minimale normale uitbreidingen zijn van $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, dan bestaat er een unitaire operator U van $\mathfrak{K}_1$ naar $\mathfrak{K}_2$ die N_1 op N_2 afstuurt (d.w.z.: $UN_1 = N_2U$) en die op $\mathfrak{H}$ de identieke is.

Bewijs :

Zij $\mathcal{L}_i$ de verzameling van alle eindige sommen van de vorm $\sum_k N_i^{*k}\xi_k$, met alle $\xi_k \in \mathfrak{H}$, voor $i = 1, 2$. We weten dus $\mathfrak{K}_i = \bar{\mathcal{L}}_i$ *(i=1,2)*. De evidente definitie van U is nu dus: $U(\sum_k N_1^{*k}\xi_k) = \sum_k N_2^{*k}\xi_k$. We moeten nog nagaan dat U goed gedefinieerd is, unitair is, en inderdaad voldoet aan $UN_1 = N_2U$.

U goed gedefinieerd wil zeggen: als $\sum_k N_1^{*k}\xi_k = \sum_k N_1^{*k}\eta_k$, dan moet $\sum_k N_2^{*k}\xi_k = \sum_k N_2^{*k}\eta_k$, of equivalent: als $\sum_k N_1^{*k}\xi_k = 0$, dan moet $\sum_k N_2^{*k}\xi_k = 0$. Voor elke subnormale S met normale uitbreiding N geldt:

$$\begin{aligned} \|\sum_k N^{*k}\xi_k\|^2 &= \langle \sum_k N^{*k}\xi_k, \sum_j N^{*j}\xi_j\rangle \\ &= \sum_j \sum_k \langle N^j\xi_k, N^k\xi_j\rangle \\ &= \sum_j \sum_k \langle S^j\xi_k, S^k\xi_j\rangle \qquad (2) \end{aligned}$$

dus ook voor S en zowel N_1 als N_2 geldt dit. Hieruit leren we niet enkel dat U goed gedefinieerd is, we kunnen er ook uit besluiten dat U een isometrie is (van $\mathcal{L}_1$ naar $\mathcal{L}_2$), dus U heeft een unieke isometrische uitbreiding van $\mathfrak{K}_1$ naar $\mathfrak{K}_2$, en deze uitbreiding zal inderdaad de identieke afbeelding zijn op $\mathfrak{H}$. Omdat een surjectieve isometrie unitair is, is de uitbreiding van U dus unitair.

Dat $UN_1 = N_2U$ is een eenvoudige berekening:

$$\begin{aligned} UN_1(\sum_k N_1^{*k}\xi_k) &= U(\sum_k N_1^{*k}N_1\xi_k) \\ &= \sum_k N_2^{*k}S\xi_k \\ &= \sum N_2^{*k}N_2\xi_k \\ &= N_2(\sum_k N_2^{*k}\xi_k) \\ &= N_2U(\sum_k N_1^{*k}\xi_k) \end{aligned}$$

∎

OPMERKING:
Vanaf nu is N dus de *minimale* normale uitbreiding van de subnormale S, op de ruimten $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K}$.

§ 2 Voorbeelden

In deze paragraaf zullen we nog enkele voorbeelden geven van zowel sub- als hyponormale operatoren. Het triviale voorbeeld is natuurlijk een normale operator, maar laat het duidelijk zijn dat de theorie van de subnormale, noch die van de hyponormale operatoren daarvoor uitgevonden is.

2.1 Vermenigvuldiging met z [9]

Neem een deelverzameling $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ en bekijk $\mathfrak{K} = L^2(\Delta, \mu)$, voor een zekere Borelmaat μ. De operator $N_\mu : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} : f \mapsto Nf = zf$, waarbij z de identieke functie op Δ voorstelt, is een normale operator. (N_μ^* is de vermenigvuldigingsoperator met $\bar{z}$ en voor iedere functie f is $z\bar{z}f = \bar{z}zf$). Bekijk nu $\mathfrak{H} = \overline{\{\text{veeltermfuncties op } \Delta\}} \subset \mathfrak{K}$ en S de operator $N_\mu|_{\mathfrak{H}}$. Duidelijk is S subnormaal met N_μ als normale uitbreiding. Er bestaan Δ's waarop S zelf niet normaal is; neem bijvoorbeeld $\Delta = \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} | \ |\lambda| = 1\}$, immers $\mathfrak{H}$ is geen reducerende deelruimte voor N_μ voor deze Δ, immers $\bar{z} \perp p(z)$ voor elke polynoom p. ★

Nu het beloofde voorbeeld van een niet-subnormale hyponormale operator:

2.2 Gewogen verschuivingen [22]

Zij $\mathfrak{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, en zij T de shiftoperator met gewichten $(\lambda_n)_n$, d.w.z.

$$T(a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad = \quad (0, \lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3, \ldots).$$

We eisen dat T begrensd is, dus moet $\sup_n |\lambda_n| < \infty$. De zelfcommutator D heeft hier een eenvoudige vorm. Het is een diagonaalmatrix met als diagonaal $(|\lambda_0|^2, |\lambda_1|^2 - |\lambda_0|^2, |\lambda_2|^2 - |\lambda_1|^2, \ldots)$. Dus T is hyponormaal <u>*asa*</u> $|\lambda_0| \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$. We zoeken nu dus λ_i's waarvoor T niet subnormaal is.

Omdat het moeilijk te bewijzen is dat er geen normale uitbreiding bestaat, zoeken we een nodige eigenschap voor subnormaliteit:

Zij $(\xi_k)_k$ een rij in $\mathfrak{H}$, die slechts op eindig veel plaatsen niet-nul is. Voor een subnormale operator S geldt $\sum_j \sum_k \langle S^j \xi_k, S^k \xi_j \rangle \geqslant 0$ wegens vergelijking (2). Als we hierin elke ξ_j vervangen door een scalair veelvoud $\mu_j \xi_j$, krijgen we

$$\sum_j \sum_k \langle S^j \xi_k, S^k \xi_j \rangle \bar{\mu}_j \mu_k \;\geqslant\; 0,$$

of met andere woorden de matrix $(\langle S^j \xi_k, S^k \xi_j \rangle)_{j,k}$ is positief.

Nemen we nu als gewichten voor T: $(\alpha, \beta, 1, 1, \ldots)$, met $0 < \alpha < \beta < 1$, dan is T dus inderdaad hyponormaal. Bekijk nu $(\langle S^j e_k, S^k e_j \rangle)_{j,k=0,1,2}$; waarbij $\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ de standaard orthonormale basis is van $\ell^2(\mathbb{N})$. Als we deze matrix uitschrijven krijgen we $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha\beta \\ \alpha & \beta^2 & \beta \\ \alpha\beta & \beta & 1 \end{pmatrix}$, en de determinant hiervan is $-\alpha^2(1-\beta^2)^2$, hetgeen negatief is, zodat T nooit subnormaal kan zijn. ★

Een hyponormale operator kunnen we ook op een andere manier bepalen. Zij $T = X + iY$ de cartesiaanse decompositie van T. We zien eenvoudig dat $D_T = 2i[X, Y]$. Een hyponormale operator T komt dus overeen met een paar zelftoegevoegde operatoren (X, Y) die voldoen aan $i[X, Y] \geqslant 0$. Dergelijk paar noemt men daarom ook soms een hyponormaal paar.

2.3 Een integraaloperator [25]

Zij $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$ (met op [0,1] de Lebesguemaat). Bekijk de positieoperator X gegeven door $Xf(t) = tf(t)$. We zoeken nu dus een zelftoegevoegde operator Y die voldoet aan $i[X, Y] \geqslant 0$.

De operator Y, gegeven door

$$(Yf)(t) \;=\; \frac{i}{\pi} H\!\int_0^1 \frac{f(s)}{s-t}\, ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

met $H\!\!\int$ de hoofdwaardeintegraal, blijkt hieraan te voldoen:

$$\begin{aligned}
\langle i[X,Y]f,f\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (H\!\!\int_0^1 \frac{sf(s)}{s-t}\,ds - t\,H\!\!\int_0^1 \frac{f(s)}{s-t}\,ds)\overline{f(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (H\!\!\int \frac{(r+t)f(r+t)}{r}\,dr - t\,H\!\!\int \frac{f(r+t)}{r}\,dr)\overline{f(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (H\!\!\int \frac{rf(r+t)}{r}\,dr)\overline{f(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 f(s)\overline{f(t)}\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Deze formele berekeningen mogen we maken want Y is een goed gedefinieerde begrensde operator op $L^2([0,1])$. Immers, dezelfde operatie, toegepast op $L^2(\mathbb{R})$, met de integraal dan ook lopende over heel $\mathbb{R}$, is de Hilberttransformatie. In [34] wordt aangetoond dat deze Hilberttransformatie een goed gedefinieerde unitaire operator is van $L^2(\mathbb{R})$ naar $L^2(\mathbb{R})$. Als we nu deze Hilberttransformatie samenstellen met de projectie van $L^2(\mathbb{R})$ naar $L^2([0,1])$ (vermenigvuldiging met de karakteristieke functie van [0,1]), bekomen we onze Y, zodat die zeker begrensd is. ★

We kunnen hierin nog verder gaan: zij $XY = A + iB$ de cartesiaanse ontbinding van XY, dan is T hyponormaal <u>*asa*</u> $B \leqslant 0$. Immers, $YX = (XY)^* = A - iB$, dus $[X,Y] = 2iB$. Op deze manier kunnen we hyponormale operatoren gaan creëren: kies een operator $B \leqslant 0$, en een willekeurige zelftoegevoegde A. Voor elke willekeurige oplossing (X,Y) van de vergelijking $xy = A + iB$ is $X + iY$ een hyponormale operator. Neem dus bijvoorbeeld $X = \mathbb{1}$, dan vinden we dat $\mathbb{1} - B + iA$ een hyponormale operator is. Nemen we $Y = \mathbb{1}$, dan bekomen we de hyponormale operator $A + i(B + \mathbb{1})$. Zij dus A een willekeurige zelftoegevoegde operator, $B \geqslant \mathbb{1}$ en $C \leqslant \mathbb{1}$, dan zijn $B + iA$ en $A + iC$ hyponormale operatoren.

Omdat voor een normale operator N elke macht N^k ($k \in \mathbb{N}$) terug normaal is, geldt voor elke subnormale operator S ook dat S^k subnormaal is, voor $k \in \mathbb{N}$. Deze eigenschap geldt niet voor hyponormale operatoren:

2.4 T hyponormaal, T^2 niet [22]

Zij $\mathcal{L}$ een Hilbertruimte en zij $\mathfrak{H}$ de directe som van aftelbaar veel kopieën van $\mathcal{L}$, geïndexeerd door de gehele getallen. $\mathfrak{H}$ is dus de ruimte van alle rijen $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} =$

$(\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$ van vectoren in $\mathcal{L}$ zodat $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^2 < \infty$. We definiëren een scalair product op $\mathfrak{H}$ door $\langle f, g\rangle = \sum_n \langle f_n, g_n\rangle$. Zij nu $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ een rij van positieve operatoren op $\mathcal{L}$ zodat $\{\|A_n\|;\ n \in \mathbb{Z}\}$ begrensd is, dan definieert $(Af)_n = A_n f_n$ een operator op $\mathfrak{H}$. Zij B de shift $(Bf)_n = f_{n-1}$. De toegevoegde operatoren van A en B zijn eenvoudig te berekenen: $(A^*f)_n = A_n^* f_n = A_n f_n$ (A is dus zelftoegevoegd, en eigenlijk zelfs positief) en $(B^*f)_n = f_{n+1}$ (B is dus unitair).

Zij nu $T = BA$, dan:

$$\begin{aligned}
(Tf)_n &= A_{n-1} f_{n-1},\\
(T^*f)_n &= (AB^*f)_n = A_n f_{n+1},\\
(TT^*f)_n &= A_{n-1}(A_{n-1} f_n) = A_{n-1}^2 f_n,\\
(T^*Tf)_n &= A_n(A_n f_n)_n = A_n^2 f_n,\\
(T^2 f)_n &= A_{n-1}(A_{n-2} f_{n-2}) = A_{n-1}A_{n-2} f_{n-2},\\
(T^{*2} f)_n &= A_n(A_{n+1} f_{n+2}) = A_n A_{n+1} f_{n+2},\\
(T^{*2}T^2 f)_n &= (A_n A_{n+1})(A_{n+1} A_n f_n) = A_n A_{n+1}^2 A_n f_n,\\
(T^2 T^{*2} f)_n &= (A_{n-1} A_{n-2})(A_{n-2} A_{n-1} f_n) = A_{n-1} A_{n-2}^2 A_{n-1} f_n,
\end{aligned}$$

zodat T hyponormaal is <u>*asa*</u> $(A_n^2)_n$ een stijgende rij is, en T^2 is hyponormaal <u>*asa*</u> $A_{n-1}A_{n-2}^2 A_{n-1} \leqslant A_n A_{n+1}^2 A_n$ voor elke n.

Zij nu $\mathcal{L} = \mathbb{C}^2$, dus de operatoren op $\mathcal{L}$ zijn 2×2-matrices. Zij $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dan is $D - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0$, maar

$$D^2 - C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

zodat $D^2 - C^2$ niet positief kan zijn, want zijn determinant is -1. Merk op dat C (een projectie) en D $(= (D - C) + C)$ allebei positief zijn.

Zij nu $A_n = C^{1/2} (= C)$ voor $n \leqslant 0$ en $A_n = D^{1/2}$ voor $n > 0$, dan is $A_n^2 \leqslant A_{n+1}^2$ voor iedere n, dus A is hyponormaal, maar voor $n = 1$ hebben we $A_{n-1}A_{n-2}^2 A_{n-1} = C^2 \nleqslant D^2 = A_n A_{n+1}^2 A_n$. ★

OPMERKING:
Men kan zich nu de vraag stellen of een polynomiaal hyponormale operator T (dus een operator T zodat voor elke polynoom p: $p(T)$ hyponormaal is) noodzakelijk subnormaal is. Het antwoord hierop is negatief; er bestaat dus een operator T zodat

voor elke polynoom p geldt dat $p(T)$ hyponormaal is, en T toch niet subnormaal is. Zie hiervoor [13].

Tenslotte nog twee voorbeeldjes van een subnormale operatoren:

2.5 Isometrieën [25]

Zij V een isometrie op $\mathfrak{H}$ ($\|V\xi\| = \|\xi\|$ voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$, of equivalent $V^*V = \mathbb{1}$) , en zij D_V haar zelfcommutator. Je kan eenvoudig narekenen dat D_V zelftoegevoegd en idempotent is. D_V is dus een projectie, en dus ook positief. V is dus al zeker hyponormaal.

Bekijk $U := \begin{pmatrix} V & D_V \\ 0 & V^* \end{pmatrix}$ op $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Dan is $U^* = \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ D_V & V \end{pmatrix}$. Nu is het eenvoudig na te rekenen dat $D_V V = 0 = V^* D_V$ (en $D_V^2 = D_V$ wisten we al) . Dus $U^*U = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = UU^*$, waaruit we leren dat U normaal is (zelfs unitair). Elke isometrie is dus een subnormale operator!

Nu is de eenzijdige shift U_+ uit voorbeeld 1.3 ook een isometrie, we gaan nagaan of de hierboven voorgestelde normale uitbreiding unitair equivalent is met de minimale normale uitbreiding, de tweezijdige shift U_+^-.

We voeren een nieuwe notatie in voor de tweede sommand van $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ door de bijectie $n \mapsto -n-1$ toe te passen op de indices. D_{U_+} is de projectie is op de eerste component, die we noteren met P. De voorgestelde normale uitbreiding wordt dan: $\begin{pmatrix} U_+ & P \\ 0 & U_+^* \end{pmatrix}$. We passen die (en zijn toegevoegde) toe op een willekeurige vector $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots) \oplus (\xi_{-1}, \xi_{-2}, \ldots) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U_+ & P \\ 0 & U_+^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi_0, \xi_1, \ldots) \\ (\xi_{-1}, \xi_{-2}, \ldots) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (0, \xi_0, \xi_1, \ldots) + (\xi_{-1}, 0, 0, \ldots) \\ (\xi_{-2}, \xi_{-3}, \ldots) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots) \\ (\xi_{-2}, \xi_{-3}, \ldots) \end{pmatrix}. \\
\begin{pmatrix} U_+^* & 0 \\ P & U_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi_0, \xi_1, \ldots) \\ (\xi_{-1}, \xi_{-2}, \ldots) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \ldots) \\ (\xi_0, 0, 0, \ldots) + (0, \xi_{-1}, \xi_{-2}, \ldots) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \ldots) \\ (\xi_0, \xi_{-1}, \xi_{-2} \ldots) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dus inderdaad is de voorgestelde normale uitbreiding gewoon de tweezijdige shift U_+^-.

Men kan zich dan ook de vraag stellen of dit voor elke isometrie de minimale normale uitbreiding is. Het antwoord daarop is echter negatief. Neem immers een isometrie V die reeds normaal is (een unitaire operator dus). Dan is V zelf zijn minimale normale uitbreiding en niet $V \oplus V^*$. Nu bestaat echter de mogelijkheid dat V unitair equivalent is met $V \oplus V^*$ (denk bijvoorbeeld aan de eenheidsoperator op $\ell^2(\mathbb{N})$; omdat $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, is $\ell^2(\mathbb{N}) \cong \ell^2(\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}) \cong \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$, dus is $\mathbb{1} \cong \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$). Volgende stelling halen we uit [6]:

2.5.1 Stelling

*Zij N, A en B normale operatoren met N *-cyclisch en $N \oplus A \cong N \oplus B$, dan is $A \cong B$.*

Bekijk dan nu de tweezijdige shift U_+^-, die is unitair (dus normaal) en ook *-cyclisch. Dus geldt niet $U_-^+ \cong U_-^+ \oplus U_-^{+*}$. ★

2.6 Quasinormale operatoren [22]

Een quasinormale operator is een operator A die commuteert met A^*A. Elke normale operator is quasinormaal, en men kan nagaan dat de omgekeerde implicatie niet klopt (de eenzijdige schuifoperator U_+ uit voorbeeld 1.3 is een expliciet tegenvoorbeeld). Wel geldt:

2.6.1 Stelling

Zij $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een quasinormale operator, dan is A ook subnormaal.

Bewijs :
Omdat $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$, en A^* noodzakelijk ook commuteert met A^*A, is $\operatorname{Ker} A$ een reducerende deelruimte voor A. Dus A is de directe som van 0 en een operator met triviale kern. We veronderstellen dat $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, omdat de term 0 toch geen invloed heeft op het al dan niet subnormaal zijn (0 is immers een normale operator). Zij nu W de vierkantswortel van de positieve operator A^*A. Dan geldt

$$\|W\xi\|^2 = \langle W\xi, W\xi\rangle = \langle W^2\xi, \xi\rangle = \langle A^*A\xi, \xi\rangle = \|A\xi\|^2$$

voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$. We kunnen dus een isometrie definiëren: $UW\xi = A\xi$, op het bereik van W. $\operatorname{Ran} W = \operatorname{Ran} A^*A = A^*(\operatorname{Ran} A) = A^*((\operatorname{Ker} A^*)^\perp) = \operatorname{Ran} A^*$, en

$\overline{\operatorname{Ran} A^*} = (\operatorname{Ker} A)^\perp = \mathfrak{H}$, zodat U uitgebreid kan worden tot een isometrie op heel $\mathfrak{H}$. We hebben dus $UW = A$ en $A^*A = W^2$.

> (Deze constructie noemen we de polaire decompositie van een operator. Het idee erachter is natuurlijk de ontbinding van een complex getal is een positief getal en een getal van modulus 1. Voor een willekeurige operator is het niet zo dat er een decompositie bestaat van de vorm UW met W positief en U een isometrie, echter wel als men slechts eist dat U een partiële isometrie is (dit is een operator die zich op het orthogonaal complement van zijn kern gedraagt als een isometrie). De constructie is dezelfde als hierboven, enkel de details van de verificatie verschillen.)

A is quasinormaal, dus A commuteert met W^2. Omdat de wortel van een operator kan geconstrueerd worden als limiet van een rij veeltermen in de bewuste operator, zal A ook commuteren met W. Dus $(UW - WU)W = 0$. Dus $UW - WU$ is 0 op $\operatorname{Ran} W$, dat dicht is in $\mathfrak{H}$, zodat $UW = WU$, en omdat W positief is, geldt ook $U^*W = WU^*$. Nu is U een isometrie, zodat weer $D_U U = U^* D_U = 0$ en $D_U^2 = D_U$ met D_U de zelfcommutator $[U^*, U] = \mathbb{1} - UU^*$. Zij nu

$$B = \begin{pmatrix} UW & D_U W \\ 0 & U^*W \end{pmatrix},$$

dan is

$$B^* = \begin{pmatrix} U^*W & 0 \\ D_U W & UW \end{pmatrix}$$

zodat

$$B^*B = \begin{pmatrix} W^2 & 0 \\ 0 & W^2 \end{pmatrix} = BB^*.$$

B is dus een normale uitbreiding van A, zodat A subnormaal is. ∎

§ 3 Zuivere hypo- en subnormale operatoren

Deze paragraaf is terug te vinden in [25].

3.1 Definitie

We noemen een hyponormale (en dus ook een subnormale) operator T zuiver, als er geen reducerende deelruimte $\mathcal{L}$ bestaat zodat $T|_{\mathcal{L}}$ normaal is. ▲

Een eenvoudig voorbeeldje van een zuivere subnormale operator is de eenzijdige shift U_+ uit voorbeeld 1.3. Verderop zullen we een ander voorbeeld zien.

3.2 Stelling

Zij $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een hyponormale operator, dan bestaat er een unieke orthogonale decompositie: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_n(T)$, zodat $\mathfrak{H}_p(T)$ en $\mathfrak{H}_n(T)$ reducerende deelruimtes voor T zijn, zodat:

(i) $T_p := T|_{\mathfrak{H}_p}$ *is zuiver hyponormaal,*

(ii) $T_n := T|_{\mathfrak{H}_n}$ *is normaal.*

Zij $D := [T^*, T]$ de zelfcommutator van T, dan is:

$$\mathfrak{H}_p(T) = \bigvee\{T^{*k}T^l D\xi |\ k, l \in \mathbb{N}, \xi \in \mathfrak{H}\}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{H}_n(T) = \{\eta \in \mathfrak{H} |\ DT^{*l}T^k\eta = 0, \forall k, l \in \mathbb{N}\}. \tag{4}$$

Bewijs :
Definieer $\mathfrak{H}_0 = \bigvee\{AD\xi | \xi \in \mathfrak{H}, A \in C^*(T)\}$, en $\mathfrak{H}_1 = \cap_{A \in C^*(T)} \mathrm{Ker}\,(DA)$. Duidelijk is $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0^\perp$ en zijn $\mathfrak{H}_0$ en $\mathfrak{H}_1$ reducerende deelruimtes voor T.

Zij nu $\mathcal{L}$ een reducerende deelruimte voor T, zodat $T|_{\mathcal{L}}$ normaal is, dan is $DA|_{\mathcal{L}} = 0$, voor alle $A \in C^*(T)$, zodat $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Dus $\mathfrak{H}_1$ is de grootste reducerende deelruimte van T waarop T normaal is. Hieruit volgt ook dat $T|_{\mathfrak{H}_0}$ zuiver hyponormaal is, dus $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_p(T)$ en $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_n(T)$.

Nu kan men monomen van de vorm $T^{*n_1}T^{m_1}T^{*n_2}T^{m_2}\dots T^{*n_k}T^{m_k}D$ herschrijven als lineaire combinaties van uitdrukkingen als $T^{*n}T^mD$, Door de relatie $TT^* = T^*T - D$ te gebruiken. (merk op dat het helemaal niet uitmaakt of er D staat of DB voor een willekeurige operator B , omdat $DB\xi = D\eta$ met $\eta = B\xi \in \mathfrak{H}$)

Hieruit volgt dat voor elke $A \in C^*(T)$ de operator AD ook op dergelijke manier geschreven kan worden. Hieruit volgen (3) en (4). ∎

Met behulp van volgend lemma kunnen we dit resultaat scherper stellen in het geval van subnormale operatoren:

3.3 Lemma

Zij S een subnormale operator met zelfcommutator D, dan:

(i) $\operatorname{Ker}(D)$ *is invariant onder S,*

(ii) $\overline{\operatorname{Ran}(D)}$ *is invariant onder S^**

BEWIJS :

(i) Zij N een normale uitbreiding van S en schrijf N als 2×2-operatormatrix $N = \begin{pmatrix} S & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Vermits N normaal is, volgt hieruit dat $GF^* = F^*S$, dus $S(\operatorname{Ker} F^*) \subseteq \operatorname{Ker} F^*$. Nu is $D = FF^*$, dus, vermits voor elke operator A geldt: $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Ran} A^*)^{\perp}$:

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} FF^* = \operatorname{Ker} F^* \cup (\operatorname{Ran} F^* \cap \operatorname{Ker} F) = \operatorname{Ker} F^*.$$

Dus $\operatorname{Ker} D$ is invariant onder S.

(ii) We gebruiken nu de gelijkheid $S^*F = FG^*$. Dus $S^*(\operatorname{Ran} F) \subseteq \operatorname{Ran} F$, en $\overline{\operatorname{Ran} D} = \overline{F(\overline{\operatorname{Ran} F^*})} = \overline{F((\operatorname{Ker} F)^{\perp})} = \overline{\operatorname{Ran} F}$.

∎

Hieruit volgt dat we stelling 3.2 kunnen verfijnen tot:

3.4 Stelling

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een subnormale operator, dan bestaat er een unieke orthogonale decompositie: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(S) \oplus \mathfrak{H}_n(S)$, zodat $\mathfrak{H}_p(S)$ en $\mathfrak{H}_n(S)$ reducerende deelruimtes voor S zijn, zodat:

(i) $S_p := S|_{\mathfrak{H}_p}$ *is zuiver subnormaal,*

(ii) $S_n := S|_{\mathfrak{H}_n}$ *is normaal.*

Verder is, met D de zelfcommutator van S:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_p(S) &= \bigvee\{S^k D\xi|\ k \in \mathbb{N}, \xi \in \mathfrak{H}\}, & (5) \\ \mathfrak{H}_n(S) &= \{\eta \in \mathfrak{H}|\ DS^{*k}\eta = 0, k \in \mathbb{N}\}. & (6) \end{aligned}$$

De ruimtes $\mathfrak{H}_p(.)$ en $H_n(.)$ noemt men de zuivere en de normale deelruimte van $\mathfrak{H}$ voor de betreffende operator, en die operator beperkt tot deze deelruimtes noemt men het zuivere resp. normale deel van de operator.

Men kan eenvoudig inzien dat de zuivere deelruimtes de kleinste reducerende deelruimtes van de operator zijn, die het bereik van de zelfcommutator van de respectievelijke operator bevatten. Uit lemma 1.9 leren we ook dat de dimensie van de zuivere deelruimte (van zowel de hypo- als de subnormale operator) niet eindig kan zijn (d.w.z. als ze groter is dan 0, dan is ze oneindig).

Herinner in het bewijs van stelling 3.2 het herschikkingsargument: omdat $TT^* = T^*T - D$ weet je dat uitdrukkingen van de vorm $T^{*n_1}T^{m_1}T^{*n_2}T^{m_2}\dots T^{*n_k}T^{m_k}D\xi$ in $\bigvee\{T^{*k}T^l D\xi|\ k,l \in \mathbb{N}, \xi \in \mathfrak{H}\}$ zitten. Men kan dit ook formeel maken:

3.5 Lemma

Zij $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $n, m \in \mathbb{N}$, dan geldt:

$$[A^n, B^m] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} A^i B^j [A,B] B^{m-j-1} A^{n-i-1}$$

Het bewijs is eenvoudig:

Bewijs :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} A^iB^j[A,B]B^{m-j-1}A^{n-i-1} &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} A^iB^j(AB-BA)B^{m-j-1}A^{n-i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} A^iB^jAB^{m-j}A^{n-i-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} A^kB^{l+1}AB^{m-l-1}A^{n-k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} A^{i+1}B^mA^{n-i-1} - \sum_{k=0}^{n-1} A^kB^mA^{n-k} \\
&= A^nB^m - B^mA^n \\
&= [A^n, B^m]
\end{aligned}
$$

∎

OPMERKING:
Men kan $[., B]$ en $[A, .]$ ook beschouwen als een vorm van afleiden (d.w.z.: de bovenstaande 'operaties' toepassen op operatoren heeft veel *(voldoende)* eigenschappen gemeen met het nemen van een afgeleide). Dan is dit gewoon de (niet-commutatieve) Leibniz-formule.

Het is misschien niet direct duidelijk in welke zin dit het herschikken van stelling 3.2 veralgemeent. De bedoeling is echter om in uitdrukkingen van de vorm

$$AAABBBBBBABBABBBAAAABABBABABABBBAAB...[A, B]$$

de A's achtereen te krijgen, en de B's achtereen te krijgen. Als je dus in je term begint met $A^nB^mA^l...[A, B]$, en je moet allemaal A's vooraan hebben, dan gebruik je $B^mA^l = A^lB^m - \sum\sum A^iB^j[A, B]\ldots$, waarbij de drie puntjes weer niet uitmaken: je wil de monomen A^iB^j toepassen op vectoren in het bereik van $[A, B]$, en dat is al zeker voldaan.

Hieruit volgt eenvoudig de volgende propositie:

3.6 Propositie

Zij $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een hyponormale operator met cartesiaanse decompositie $T = X + iY$, dan:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_p(T) &= \bigvee\{T^{*k}T^l D\xi | \xi \in \mathfrak{H},\ k,l \in \mathbb{N}\} \\
&= \bigvee\{T^k T^{*l} D\xi | \xi \in \mathfrak{H},\ k,l \in \mathbb{N}\} \\
&= \bigvee\{X^k Y^l D\xi | \xi \in \mathfrak{H},\ k,l \in \mathbb{N}\} \\
&= \bigvee\{Y^k X^l D\xi | \xi \in \mathfrak{H},\ k,l \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

3.7 Voorbeeld

We gaan voor de subnormale operator uit voorbeeld 2.5 de zuivere deelruimte berekenen. Uit (5) weten we:

$$\mathfrak{H}_p(V) = \bigvee_{k=0}^{\infty} V^k \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \oplus V\mathfrak{D} \oplus V^2\mathfrak{D} \oplus \ldots,$$

waarbij $\mathfrak{D} = \operatorname{Ran} D_V$. De laatste gelijkheid geldt omdat V een isometrie is: voor $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ en $k \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}_0$:

$$\langle V^k(V^*V - VV^*)\xi, V^{k+l}(V^*V - VV^*)\eta\rangle = \langle (V^*V - VV^*)\xi, V^l(V^*V - VV^*)\xi)\rangle = \\ \langle (V^*\mathbb{1} - \mathbb{1}V^*)\xi, V^{l-1}(V^*V - VV^*)\eta\rangle = 0,$$

dus $V^k\mathfrak{D} \perp V^{k+l}\mathfrak{D}$ voor elke $k \in \mathbb{N}$ en $l \in \mathbb{N}_0$. Nu werkt V_p zeer eenvoudig op de directe-som ontbinding van $\mathfrak{H}_p$: het is gewoon de shift-operator! Merk op dat het hier niet noodzakelijk gaat om U_+, de eenzijdige shift op $\ell^2(\mathbb{N})$: de ruimte $\mathfrak{D}$ kan meerdimensionaal zijn. Als $\mathfrak{D}$ ééndimensionaal is (over $\mathbb{C}$, dus $\mathfrak{D} = \mathbb{C}$), dan hebben we wel te doen met $\ell^2(\mathbb{N})$. ★

Dit resultaat valt te veralgemenen.

3.8 Propositie (Morrel-Clancey)

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een zuivere subnormale operator met zelfcommutator D van rang 1, dan is S unitair equivalent met $\alpha U_+ + \beta\mathbb{1}$, voor $\alpha \in \mathbb{R}_0^+,\ \beta \in \mathbb{C}$.

Bewijs :
Omdat $\mathfrak{D} = D\mathfrak{H}$ ééndimensionaal is, bestaat er een eenheidsvector e_0 en een constante $\alpha > 0$ zodat

$$D\xi \;=\; \alpha^2\langle \xi, e_0\rangle e_0,$$

voor een elke $\xi \in \mathfrak{H}$.

> ($\mathfrak{D}$ is eendimensionaal, dus bestaat er een eenheidsvector e_0, zodat $D\xi = \phi(\xi)e_0$, voor een zekere (lineaire!) functionaal ϕ. Uit de stelling van Riesz[1] weten we dat er een vector η bestaat, zodat $\phi(\xi) = \langle \xi, \eta\rangle$. Nu moet $\eta \in (\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp = (\mathrm{Ker}\,D)^\perp = \mathrm{Ran}\,D^* = \mathrm{Ran}\,D$, dus is $\eta = \bar{\gamma}e_0$ met $\gamma \in \mathbb{C}_0$. Omdat D positief is, moet $\gamma \in \mathbb{R}^+$, immers $\mathbb{R}^+ \ni \langle D\xi, \xi\rangle = \gamma\langle \xi, e_0\rangle\langle e_0, \xi\rangle = \gamma|\langle \xi, e_0\rangle|^2$. Neem nu $\alpha = \gamma^{1/2}$.)

Uit lemma 3.3 weten we dat er een $\beta \in \mathbb{C}$ bestaat zodat $S^*e_0 = \bar{\beta}e_0$.

Definieer nu $V = \alpha^{-1}(S - \beta\mathbb{1})$ en $e_n = V^n e_0$, $n \in \mathbb{N}$. V is dan ook zuiver subnormaal, dus zal $\mathfrak{H} = \bigvee\{e_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ wegens stelling 3.4. Er geldt $V^*e_0 = 0$. Uit de vergelijking $(V^*V - VV^*)\xi = \langle \xi, e_0\rangle e_0$, die geldt voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$, halen we per inductie dat $V^*e_{n+1} = e_n, \quad n \geqslant 0$:

$$V^*e_1 = (V^*V - VV^*)e_0 = \langle e_0, e_0\rangle e_0 = e_0,$$
$$V^*e_{n+1} - e_n = (V^*V - VV^*)e_n = \langle e_0, e_n\rangle e_0 = \langle e_0, V^n e_0\rangle e_0 = \langle V^*e_0, V^{n-1}e_0\rangle e_0 = 0.$$

Er geldt dus voor $i < j$:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle V^i e_0, e_j\rangle = \langle e_0, e_{j-i}\rangle = \langle V^*e_0, e_{j-i-1}\rangle = 0 \quad ,$$

zodat $\{e_n\}_n$ een orthonormale basis is voor $\mathfrak{H}$. Duidelijk is $V = U_+$ tegenover deze basis.
∎

[1] Stelling (Riesz)[15]
Voor elke continue lineaire functionaal ϕ op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ bestaat er een $\eta \in \mathfrak{H}$ zodat $\phi = \langle ., \eta\rangle$.

§ 4 Het Halmos-Bram criterium

Het Halmos-Bram criterium is zeer belangrijk. Het is dan ook op zeer veel plaatsen te vinden. Ik volg [9]. Het werd voor het eerst bewezen (met een tweede eis erbij) door Paul Halmos in 1950. Joseph Bram vereenvoudigde de hypothese in 1955, door te bewijzen dat de ene eis de andere impliceert. In 1990 bewees Szymanski dat de omgekeerde implicatie ook geldt. Dit levert ons volgend lemma:

4.1 Lemma

Zij A een operator op $\mathfrak{H}$. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(*i*) *Als $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{H}$, dan*

$$\sum_{j,k} \langle A^j \xi_k, A^k \xi_j \rangle \geqslant 0. \tag{7}$$

(*ii*) *Er bestaat een constante c zodat voor elke $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{H}$:*

$$\sum_{j,k} \langle A^{j+1} \xi_k, A^{k+1} \xi_j \rangle \leqslant c \sum_{j,k} \langle A^j \xi_k, A^k \xi_j \rangle. \tag{8}$$

Bewijs :

($\Uparrow$) Merk eerst op dat het volstaat aan te nemen dat $\|A\| < 1$.

Inderdaad, voor een willekeurige constante $\rho > 0$, zij $A_1 = \rho^{-1} A$ en $\eta_k = \rho^{-k} \xi_k$. Dan:

$$\sum_{j,k} \langle A_1^j \xi_k, A_1^k \xi_j \rangle = \sum_{j,k} \langle A^j \eta_k, A^k \eta_j \rangle$$

en

$$\sum_{j,k} \langle A_1^{j+1} \xi_k, A_1^{k+1} \xi_j \rangle = \rho^{-2} \sum_{j,k} \langle A^{j+1} \eta_k, A^{k+1} \eta_j \rangle,$$

dus (i) en (ii) gelden voor A enkel en alleen als ze gelden voor A_1.

Neem vervolgens slechts 2 vectoren in vergelijking (8), $\xi_0 = 0$ en ξ_1 willekeurig. Het is dan duidelijk dat de constante c in kwestie moet voldoen aan $c \geqslant \|A\|^2$. We mogen dus aannemen dat $c \geqslant 1$, vermits vergelijking (8) geldig blijft voor grotere waarden van c.

Zij $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}^{(\infty)}$ (dit zijn de rijen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van elementen van $\mathfrak{H}$, zodat $(\|\xi_n\|)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$), en zij $\mathfrak{K}_1$ de verzameling van al de rijen in $\mathfrak{M}$ die op slechts eindig veel plaatsen verschillen van 0. Zij $M = (A^{*k}A^j)_{j,k}$ op $\mathfrak{K}_1$. Voor elke $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) \in \mathfrak{K}_1$ geldt

$$\begin{aligned}
\|M\xi\|^2 &= \sum_j \|(M\xi)_j\|^2 \\
&= \sum_j \| \sum_k A^{*k}A^j\xi_k\|^2 \\
&\leqslant \sum_j \Big(\sum_k \|A\|^{k+j}\|\xi_k\|\Big)^2 \\
&\leqslant \sum_j \Big(\sum_k \|A\|^{2k+2j}\Big)\Big(\sum_k \|\xi_k\|^2\Big) \\
&\leqslant (1 - \|A\|^2)^{-2}\|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Omdat $\|A\| < 1$, is $M\xi \in \mathfrak{M}$. M kan dus uitgebreid worden tot een begrensde operator op $\mathfrak{M}$.

Merk op dat $\langle M\xi, \xi\rangle = \sum_{j,k}\langle A^j\xi_k, A^k\xi_j\rangle = \sum_{j<k}\Big(\langle A^j\xi_k, A^k\xi_j\rangle + \overline{\langle A^j\xi_k, A^k\xi_j\rangle}\Big) + \sum_j\langle A^j\xi_j, A^j\xi_j\rangle \in \mathbb{R}$, dus M is zelftoegevoegd. Om vergelijking (7) aan te tonen, moeten we bewijzen dat M positief is. Nu geldt

$$\langle A^{(\infty)*}MA^{(\infty)}\xi, \xi\rangle = \sum_{j,k}\langle A^{j+1}\xi_k, A^{k+1}\xi_j\rangle,$$

zodat $A^{(\infty)*}MA^{(\infty)} \leqslant cM$ door vergelijking (8). We kunnen deze ongelijkheid verderzetten:

$$\begin{aligned}
\langle A^{(\infty)*2}MA^{(\infty)2}\xi, \xi\rangle &= \langle (A^{(\infty)*}MA^{(\infty)})A^{(\infty)}\xi, A^{(\infty)}\xi\rangle \\
&\leqslant c\langle MA^{(\infty)}\xi, A^{(\infty)}\xi\rangle \\
&\leqslant c^2\langle M\xi, \xi\rangle.
\end{aligned}$$

Zo verdergaan leert ons dat $\langle M\xi, \xi\rangle \geqslant c^{-n}\langle A^{(\infty)*n}MA^{(\infty)n}\xi, \xi\rangle$ voor elke $\xi \in \mathfrak{M}$, maar vermits $c \geqslant 1$, is $(c^{-n})_n$ een begrensde rij. Ook geldt $\|A^{(\infty)*n}MA^{(\infty)n}\| \leqslant \|A\|^{2n}\|M\|$ en dit laatste convergeert naar 0 voor $n \to \infty$ omdat $\|A\| < 1$. Dus

$$0 = \lim_n (c^{-n}\langle A^{(\infty)*n}MA^{(\infty)n}\xi, \xi\rangle) \leqslant \langle M\xi, \xi\rangle$$

en (i) is bewezen.

($\Downarrow$) We nemen weer aan dat $\|A\| < 1$, en zij $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{M}$ en M als hierboven. We weten al dat M een begrensde zelftoegevoegde operator is, en dat vergelijking (7) equivalent is met het feit dat M positief is. Definieer $B := A^{(\infty)}$ op $\mathfrak{M}$. Voor $\xi \in \mathfrak{M}$ geldt: $(B^*MB\xi)_j = A^*(MB\xi)_j = A^* \sum_k A^{*k}A^j(B\xi)_k = A^* \sum_k A^{*k}A^{j+1}\xi_k$. Dus

$$\begin{aligned} \|B^*MB\xi\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \|A^* \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k}A^{j+1}\xi_k\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|A^* \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k}A^{j}\xi_k\|^2 \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \| \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k}A^{j}\xi_k\|^2 \\ &\leqslant \|M\xi\|^2 \end{aligned}$$

We vinden dat $(B^*MB)^2 \leqslant M^2$ (door de normongelijkheid te vertalen als een scalair product-ongelijkheid en de (zelftoegevoegde!) operatoren naar hetzelfde lid te brengen). Omdat zowel M als B^*MB positief zijn, volgt hieruit dat $B^*MB \leqslant M$ (dit wordt bewezen in appendix A), ofte $\langle MBx, B\xi\rangle \leqslant \langle M\xi, \xi\rangle$ voor iedere $\xi \in \mathfrak{M}$. Als we dit uitschrijven krijgen we

$$\sum_{j,k} \langle A^{j+1}\xi_k, A^{k+1}\xi_j\rangle \leqslant \sum_{j,k} \langle A^{j}\xi_k, A^{k}\xi_j\rangle,$$

hetgeen (ii) is met $c = 1$.

∎

Dit technische lemma stelt ons in staat om een karakterisatie van subnormale operatoren te geven:

4.2 Stelling (Halmos-Bram)

Een operator $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is subnormaal asa

$$\sum_{j,k} \langle S^j\xi_k, S^k\xi_j\rangle \geqslant 0, \tag{7}$$

voor elke eindige set $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$.

Bewijs :

($\Rightarrow$) (7) volgt direct uit berekening (2).

($\Leftarrow$) Uit Lemma 4.1 weten we dat ook $\sum_{j,k}\langle S^{j+1}\xi_k, S^{k+1}\xi_j\rangle \leqslant c\sum_{j,k}\langle S^j\xi_k, S^k\xi_j\rangle$ geldt, voor een zekere c. We moeten nu een normale operator N vinden op een ruimte $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$ zodat $N|_{\mathfrak{H}} = S$. Zij $\mathfrak{K}_1$ weer de verzameling van de rijen in $\mathfrak{H}$ die op slechts eindig veel plaatsen verschillen van 0. Definieer een sesquilineaire vorm op $\mathfrak{K}_1$ door

$$[\xi, \eta] \;\; := \;\; \sum_{j,k}\langle S^k\xi_j, S^j\eta_k\rangle,$$

voor alle $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ en $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ in $\mathfrak{K}_1$. (7) vertaalt zich dan in $[\xi, \xi] \geqslant 0$. Definieer nu

$$\mathfrak{K}_0 \;\; := \;\; \{\xi \in \mathfrak{K}_1 |\ [\xi, \xi] = 0\}.$$

$\mathfrak{K}_0$ is een gesloten deelruimte van $\mathfrak{K}_1$:

- $0 = (0, 0, \ldots) \in \mathfrak{K}_0$
- $\xi \in \mathfrak{K}_0 \Rightarrow \lambda\xi \in \mathfrak{K}_0$: $\qquad [\lambda\xi, \lambda\xi] = |\lambda|^2[\xi, \xi], \forall\lambda \in \mathbb{C}$
- $\xi, \eta \in \mathfrak{K}_0 \Rightarrow \xi + \eta \in \mathfrak{K}_0$:

  $$[\xi + \eta, \xi + \eta] = [\xi, \xi] + [\eta, \eta] + 2\Re e([\xi, \eta]) \leqslant 2|[\xi, \eta]| \leqslant 2\sqrt{[\xi, \xi][\eta, \eta]} = 0,$$

  waarbij we de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz gebruikt hebben in de voorlaatste stap.
- Zij $(\xi_\alpha)_\alpha$ een net in $\mathfrak{K}_0$ dat convergeert binnen $\mathfrak{K}_1$, dan is $\lim_\alpha \xi_\alpha \in \mathfrak{K}_0$, omdat een limiet door een eindige som en het scalair product schuift.

Zij nu $\xi \in \mathfrak{K}_0$ en $\eta \in \mathfrak{K}_1$ willekeurig. Dan leren we uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz dat $|[\xi, \eta]|^2 \leqslant [\xi, \xi][\eta, \eta] = 0$, dus dan $[\xi, \eta] = 0$. Hieruit volgt dat

$$[\xi + \mathfrak{K}_0, \eta + \mathfrak{K}_0] \;\; := \;\; [\xi, \eta]$$

een goed gedefinieerde sesquilineaire vorm is op $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0$. Door de constructie is dit zelfs een scalair product.

Zij nu $\mathfrak{K}$ de vervollediging van $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0$, tegenover de norm gedefinieerd door dit scalair product. Definieer een functie N_0 op $\mathfrak{K}_1$ door $(N_0\xi)_k = S\xi_k$. N_0 is dan lineair en $[N_0\xi, N_0\xi] = \sum_{j,k}\langle S^{k+1}\xi_j, S^{j+1}\xi_k\rangle \leqslant c[\xi, \xi]$. Dus $N_0\mathfrak{K}_0 \subseteq \mathfrak{K}_0$ en N_0 induceert dus een begrensde operator N op $\mathfrak{K}$, gedefinieerd door $N(\xi + \mathfrak{K}_0) = N_0\xi + \mathfrak{K}_0$.

De bewering is nu dus dat N normaal is, en dat $\mathfrak{H}$ ingebed kan worden in $\mathfrak{K}$ zodat $\mathfrak{H}$ een invariante deelruimte voor N is. Om in te zien dat N normaal is, definieer een operator A_0 op $\mathfrak{K}_1$ door $(A_0\xi)_0 = 0$ en $(A_0\xi)_k = \xi_{k-1}$ voor $k \geqslant 1$. Nu geldt voor alle $\xi \in \mathfrak{K}_1$:

$$\begin{aligned}
[A_0\xi, A_0\xi] &= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\langle S^k(A_0\xi)_j, S^j(A_0\xi)_k\rangle \\
&= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\langle S^{k+1}\xi_j, S^{j+1}\xi_k\rangle \\
&\leqslant c\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\langle S^k\xi_j, S^j\xi_k\rangle \\
&= c[\xi,\xi]
\end{aligned}$$

Dus A_0 induceert een begrensde operator A op $\mathfrak{K}$. Nu geldt voor alle $\xi, \eta \in \mathfrak{K}_1$:

$$\begin{aligned}
[\xi, A_0\eta] &= \sum_{j,k}\langle S^k\xi_j, S^j(A_0\eta)_k\rangle \\
&= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\langle S^k\xi_j, S^j\eta_{k-1}\rangle \\
&= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\langle S^{k-1}(N_0\xi)_j, S^j\eta_{k-1}\rangle \\
&= [N_0\xi, \eta],
\end{aligned}$$

dus $A_0 = N_0^* \Rightarrow A = N^*$. N_0 is normaal, dat is nu gemakkelijk na te gaan: $(N_0^*N_0\xi)_0 = 0 = (N_0N_0^*\xi)_0$ en voor $k \geqslant 1 : (N_0^*N_0\xi)_k = (N_0\xi)_{k-1} = S\xi_{k-1}$ en $(N_0N_0^*\xi)_k = S(N_0^*\xi)_k = S\xi_{k-1}$. Dus ook N is normaal.

Beschouw nu voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$ de rij $\tilde{\xi} = (\xi, 0, 0, \ldots) \in \mathfrak{K}_1$. $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ is dan een isometrische inbedding van $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}_1$. Dit leidt tot een inbedding van $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$, die invariant is voor N en waarvoor $N|_{\mathfrak{H}} = S$.

∎

Door lemma 4.1 kunnen we eenvoudig een equivalent criterium formuleren:

4.3 Stelling

Een operator $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is subnormaal asa

$$\sum_{j,k}\langle A^{j+1}\xi_k, A^{k+1}\xi_j\rangle \leqslant c\sum_{j,k}\langle A^j\xi_k, A^k\xi_j\rangle, \tag{8}$$

voor een zekere $c > 0$, en elke eindige set $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$.

Een ander equivalent van het Halmos-Bram criterium werd bewezen in [5].

4.4 Stelling

Een operator $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is subnormaal asa

$$\sum_{j,k} B_j^* S^{*k} S^j B_k \geqslant 0 \tag{9}$$

voor alle $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$.

BEWIJS :
Omwille van stelling 4.2 is het voldoende te bewijzen dat vergelijkingen (7) en (9) equivalent zijn.

- (7) $\Rightarrow$ (9)

  Zij $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$. Voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$, noem $\xi_k = B_k \xi$. Invullen levert het gevraagde.

- (9) $\Rightarrow$ (7)

  Omdat elke operator de directe som is van *-cyclische operatoren, is het voldoende vergelijking (7) te bewijzen als S *-cyclisch is. Zij dus η een *-cyclische vector voor S, dus $\mathfrak{H} = \overline{C^*(S)\eta}$. Zij $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$, dan volgt uit (9) dat (7) geldt voor $\xi_k = B_k \eta$. Maar aangezien (7) dus geldt voor een dichte deelverzameling, geldt ze voor heel $\mathfrak{H}$.

∎

OPMERKING:
Hieruit volgt nog maar eens dat subnormale operatoren hyponormaal zijn: neem $n = 1$, $B_0 = -S^*$, $B_1 = \mathbb{1}$, dan krijgen we:

$$SS^* - SS^* - SS^* + S^*S \geqslant 0$$

Operatorenalgebra's zijn C^*-algebra's, en in operatorentheorie tracht men dan dan ook definities te veralgemenen voor elementen van willekeurige C^*-algebra's. Dus in de definitie mag geen sprake meer zijn van de ruimte waarop de operatoren werken. Hoewel dit voor normale en hyponormale operatoren eenvoudig is (er is immers gewoon een conditie op het element en zijn toegevoegde), is dit voor subnormale operatoren dus niet zo triviaal: de ruimte waarop de operator werkt moet immers uitgebreid kunnen worden. Dit probleem wordt echter opgelost door vorige stelling:

4.5 Definitie

Zij $\mathcal{A}$ een C^*-algebra en $a \in \mathcal{A}$. Men noemt a subnormaal als $\sum_{j,k} b_j^* a^{*k} a^j b_k \geqslant 0$ voor alle $b_0, b_1, \ldots, b_n \in C^*(a)$. ▲

Hieruit leren we ook dat subnormaliteit behouden blijft onder *-homomorfismen:

4.6 Eigenschap

*Zij $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ C^*-algebra's. Zij $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ een *-homomorfisme, en zij $a \in \mathcal{A}_1$ subnormaal. Dan is $\phi(a)$ ook subnormaal.*

Mary Embry heeft ook een gewijzigde vorm van Halmos-Bram bewezen [14]:

4.7 Stelling

Een operator S is subnormaal <u>asa</u>

$$\sum_{j,k} \langle S^{j+k} \xi_k, S^{j+k} \xi_j \rangle \geqslant 0,$$

voor elke eindige set $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$.

BEWIJS :

(⇒) Eenvoudig, pas immers het Halmos-Bram criterium toe op de vectoren $\eta_i = S^k \xi_k$

(⇐) Helemaal analoog als in lemma 4.1 kunnen we bewijzen dat er een $c > 0$ bestaat zodat voor elke eindige verzameling $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$:

$$\sum_{j,k} \langle S^{j+k+1} \xi_k, S^{j+k+1} \xi_j \rangle \leqslant c \sum_{j,k} \langle S^{j+k} \xi_k, S^{j+k} \xi_j \rangle.$$

Zij nu weer $\mathfrak{K}_1$ de verzameling van de rijen in $\mathfrak{H}$ die op slechts eindig veel plaatsen verschillen van 0. Definieer een sesquilineaire vorm op $\mathfrak{K}_1$ door

$$[\xi, \eta] := \sum_{j,k} \langle S^{j+k} \xi_j, S^{j+k} \eta_k \rangle,$$

voor alle $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ en $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ in $\mathfrak{K}_1$. Dan zal dus $[\xi, \xi] \geqslant 0$. Definieer weer

$$\mathfrak{K}_0 \quad := \quad \{\xi \in \mathfrak{K}_1 | \ [\xi, \xi] = 0\}.$$

Zij $\mathfrak{K}$ weer de vervollediging van $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0$, tegenover de norm gedefinieerd door het scalair product, afgeleid uit bovenstaande sesquilineaire vorm. Definieer een functie N_0 op $\mathfrak{K}_1$ door $(N_0\xi)_k = S\xi_k$. N_0 is dan lineair en $[N_0\xi, N_0\xi] = \sum_{j,k}\langle S^{j+k+1}\xi_j, S^{j+k+1}\xi_k\rangle \leqslant c[\xi, \xi]$. Dus N_0 induceert dus een begrensde operator N op $\mathfrak{K}$. Definieer ook een operator A_0 op $\mathfrak{K}_1$ door $(A_0\xi)_0 = 0$ en $(A_0\xi)_k = \xi_{k-1}$ voor $k \geqslant 1$. A_0 induceert ook een begrensde operator A op $\mathfrak{K}$.

Op $\mathfrak{K}_1$ geldt $(N_0A_0\xi)_k = S(A_0\xi)_k = S\xi_{k-1}$ en $(A_0N_0\xi)_k = (N_0\xi)_{k-1} = S\xi_{k-1}$, zodat $NA = AN$. Verder geldt ook

$$\begin{aligned} [N_0\xi, N_0\eta] &= \sum_{j,k}\langle S^{j+k+1}\xi_j, S^{j+k+1}\eta_k\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle S^{j+k}\xi_j, S^{j+k}\eta_{k-1}\rangle \\ &= [\xi, A_0\eta], \end{aligned}$$

zodat $A = N^*N$. Hieruit, en uit $NA = AN$, volgt dat N quasinormaal is, en dus subnormaal. (voorbeeld 2.6)

Beschouw nu voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$ de rij $\tilde{\xi} = (\xi, 0, 0, \ldots) \in \mathfrak{K}_1$. $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ is dan een isometrische inbedding van $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}_1$. Dit leidt tot een inbedding van $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$, die invariant is voor N en waarvoor $N|_{\mathfrak{H}} = S$. Dus er bestaat een ruimte $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ en een normale operator M op $\mathfrak{L}$ zodat $M|_{\mathfrak{H}} = S$. S is dus subnormaal.

∎

§ 5 Norm en spectrum

Van normale operatoren zijn vele eigenschappen bekend. Aan de hand hiervan probeert men ook eigenschappen van de sub- en de hyponormale operatoren te weten te komen. Hier een eigenschap die gewoon blijft gelden:

5.1 Eigenschap [22]

Voor een hyponormale operator T geldt: $r(T) = \|T\|$.

BEWIJS :
Zij T een hyponormale operator. Vermits

$$\begin{aligned} \|T^n\xi\|^2 &= \langle T^n\xi, T^n\xi\rangle = \langle T^*T^n\xi, T^{n-1}\xi\rangle \leqslant \|T^*T^n\xi\|.\|T^{n-1}\xi\| \\ &\leqslant \|T^{n+1}\xi\|.\|T^{n-1}\xi\| \leqslant \|T^{n+1}\|.\|T^{n-1}\|.\|\xi\|^2 \end{aligned}$$

voor elke vector ξ, is $\|T^n\|^2 \leqslant \|T^{n+1}\|.\|T^{n-1}\|$.

We bewijzen nu de gelijkheid $\|T^n\| = \|T\|^n$ per inductie. Duidelijk is deze gelijkheid waar voor $n = 1$. Stel nu dat ze waar is voor elke k met $1 \leqslant k \leqslant n$, dan kunnen we bovenstaande ongelijkheid herschrijven als $\|T\|^{2n} \leqslant \|T^{n+1}\|.\|T\|^{n-1}$, waaruit we halen dat $\|T\|^{n+1} \leqslant \|T^{n+1}\|$. De omgekeerde ongelijkheid geldt voor elke operator, dus is de inductiestap bewezen.

Uit de formule voor de spectrale straal vinden we dan het te bewijzen. ∎

5.2 Lemma [25]

Zij T een hyponormale operator.

(*i*) *Als $\lambda \in \sigma_p(T)$ dan $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.*

(*ii*) *Als $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ dan $\bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(T^*)$.*

(*iii*) *Eigenruimten reduceren T, en de beperking van T tot eigenruimten is normaal.*

(*iv*) *Als T zuiver is, dan is $\sigma_p(T) = \emptyset$*

(*v*) *Eigenruimten behorende bij verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal.*

(*vi*) *Zij* $\lambda \neq \mu \in \sigma_{ap}(T)$ *en* $(\xi_n)_n$, $(\eta_n)_n$ *rijen eenheidsvectoren in* $\mathfrak{H}$ *zodat* $\|T\xi_n - \lambda\xi_n\|$ *en* $\|T\eta_n - \mu\eta_n\|$ *naar 0 convergeren, dan* $\langle \xi_n, \eta_n \rangle \to 0$.

Bewijs :

(*i*)&(*ii*) $T - \lambda\mathbb{1}$ is hyponormaal, dus $\|T^* - \bar{\lambda}\mathbb{1}\| \leqslant \|T - \lambda\mathbb{1}\|$.

(*iii*) volgt eenvoudig uit (*i*) en het feit dat de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ commutatief is.

(*iv*) direct uit (*iii*)

(*v*) Zij $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ en $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ bijhorende eigenvectoren, dan

$$\lambda\langle \xi, \eta \rangle = \langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle = \mu\langle \xi, \eta \rangle.$$

(*vi*)
$$\begin{aligned} |(\lambda - \mu)\langle \xi_n, \eta_n \rangle| &= |\langle (\lambda\mathbb{1} - T)\xi_n, \eta_n \rangle + \langle \xi_n, (T^* - \bar{\mu}\mathbb{1})\eta_n \rangle| \\ &\leqslant \|T\xi_n - \lambda\xi_n\| + \|T\eta_n - \mu\eta_n\| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

∎

Voor een subnormale operator kan men dankzij eigenschap 1.13 nog een ander soort spectrum definiëren:

5.3 Definitie

Zij S een subnormale operator. We definiëren het normale spectrum van S als het spectrum van de minimale normale uitbreiding van S. Notatie: $\sigma_n(S)$. $\rho_n(S)$ is dan het complement van $\sigma_n(S)$. ▲

5.4 Eigenschap [9]

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *een subnormale operator.*

(*i*) $\sigma_n(S) \subseteq \sigma(S)$,

(*ii*) $\sigma_{ap}(S) \subseteq \sigma_{ap}(N)$, *met* N *de minimale normale uitbreiding van* S.

Bewijs :

(*i*) Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ de minimale normale uitbreiding van S. We moeten dus aantonen dat als $N - \lambda\mathbb{1}$ niet inverteerbaar is , dat $S - \lambda\mathbb{1}$ dan ook niet inverteerbaar is. Vermits $N - \lambda \mathbb{1}$ een normale uitbreiding is van de subnormale operator $S - \lambda \mathbb{1}$, is het voldoende te bewijzen dat N inverteerbaar is, gegeven dat S inverteerbaar is. Zij $N = \int z\, dE(z)$ de spectrale decompositie van N, $\epsilon > 0$ en $\mathfrak{M} = E(B(0, \epsilon))\mathfrak{K}$. Dus voor $\xi \in \mathfrak{M}$, $\eta \in \mathfrak{H}$ en voor alle $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |\langle \xi, \eta \rangle| &= |\langle \xi, S^k S^{-k} \eta \rangle| = |\langle \xi, N^k S^{-k} \eta \rangle| = |\langle N^{*k} \xi, S^{-k} \eta \rangle| \\ &\leqslant \|N^{*k} \xi\| \|S^{-k} \eta\| \leqslant \epsilon^k \|S^{-1}\|^k \|\xi\| \|\eta\|. \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid geldt wegens:

$$\begin{aligned} \|N^{*k} \xi\| &= \|N^{*k} E(B(0, \epsilon))\xi\| = \|(\textstyle\int_{\sigma(N)} \bar{z}^k\, dE(z))(E(B(0, \epsilon))\xi\| \\ &= \|(\textstyle\int_{B(0,\epsilon)} \bar{z}^k\, dE(z))\xi\| \leqslant \| \textstyle\int_{B(0,\epsilon)} \bar{z}^k\, dE(z)\|.\|\xi\| \leqslant \epsilon^k \|\xi\|. \end{aligned}$$

Voor $\epsilon < \|S^{-1}\|^{-1}$ moet dus $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Dus $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{H}$ als $\epsilon < \|S^{-1}\|^{-1}$, zodat dan $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}^\perp$. Nu het is eenvoudig in te zien dat $\mathfrak{M}$ een reducerende deelruimte voor N is ($E(\Delta)$ commuteert met N en N^* voor elke meetbare verzameling Δ), dus $\mathfrak{M}^\perp$ ook. Maar N is minimaal, dus $\mathfrak{M} = (0)$. Nu is voor een normale operator het spectrum gelijk aan het benaderend puntspectrum ($\sigma_c(N) \setminus \sigma_{ap}(N) = \emptyset$), en we hebben net aangetoond dat $0 \notin \sigma_{ap}(N)$, dus is N inverteerbaar.

(ii) Zij $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$, en zij $(\xi_n)_n$ een rij (in $\mathfrak{H}$), zodat $\lim_{n\to\infty} \|(S - \lambda \mathbb{1})\xi_n\| = 0$, dan is ook $\lim_{n\to\infty} \|(N - \lambda \mathbb{1})\xi_n\| = 0$.

∎

Een eenvoudige eigenschap die we nu ook eenvoudig kunnen bewijzen:

5.5 Eigenschap [9]

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ subnormaal en $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$, dan is S zelftoegevoegd.

BEWIJS :
Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ de minimale normale uitbreiding van S, dan is $\sigma(N) \subseteq \sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$ dus $N = N^*$. Maar dan is elke invariante deelruimte van $\mathfrak{K}$ ook reducerend, dus ook $\mathfrak{H}$. Door de minimaliteit van N weten we dan dat $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ en dus moet $S = N$, dus S is zelftoegevoegd. ∎

Voor elke operator $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is het numerisch bereik $W(A)$ gedefinieerd als: $W(A) = \{\langle A\xi, \xi \rangle |\ \xi \in \mathfrak{H},\ \|\xi\| = 1\}$. Er geldt dat $W(A)$ steeds (dus voor elke operator A) een begrensde convexe deelverzameling van $\mathbb{C}$ is. Ook geldt steeds dat $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$.

Noteer voor elke deelverzameling $\Delta \subset \mathbb{C}$ met $\mathrm{co}(\Delta)$ de convex omhullende van Δ (dit is de kleinste convexe verzameling die Δ omvat). Voor elke normale operator N geldt dat $\overline{W(N)} = \mathrm{co}(\sigma(N))$. (Deze drie eigenschappen van het numerisch bereik zijn terug te vinden in [30].) Volgende eigenschap zegt dat dit ook zo is voor subnormale operatoren:

5.6 Eigenschap [22]

Zij S een subnormale operator, dan is $\overline{W(S)} = co(\sigma(S))$.

Bewijs :

Zij N de minimale normale uitbreiding van S, dan geldt

$$\begin{aligned} \overline{W(N)} &= \mathrm{co}(\sigma(N)) \\ &\subseteq \mathrm{co}(\sigma(S)) \\ &\subseteq \overline{W(S)} \\ &\subseteq \overline{W(N)}, \end{aligned}$$

Waarbij de laatste inclusie triviaal volgt uit de definitie van numerisch bereik. Nu moeten dus alle inclusies gelijkheden zijn, zodat inderdaad $\overline{W(S)} = \mathrm{co}(\sigma(S))$. ∎

Met behulp van eigenschappen 5.1 en 5.4 en het spectral mapping theorem kunnen we een nuttig lemma bewijzen:

5.7 Lemma [4]

Zij N de minimale normale uitbreiding van een subnormale S.

(*i*) *Zij p een polynoom in één complexe veranderlijke, dan is $\|p(S)\| = \|p(N)\|$.*

(*ii*) *Zij $\lambda \notin \sigma(S)$ dan is $\|(S - \lambda\mathbb{1})^{-1}\| = \|(N - \lambda\mathbb{1})^{-1}\|$.*

Bewijs :

(*i*) Vermits $\sigma(N) \subseteq \sigma(S)$, zal zeker $p(\sigma(N)) \subseteq p(\sigma(S))$, dus $\sigma(p(N)) \subseteq \sigma(p(S))$. Hieruit volgt:

$$\|p(N)\| \;=\; r(p(N)) \;\leqslant\; r(p(S)) \;\leqslant\; \|p(S)\|,$$

maar triviaal geldt $\|p(S)\| \leqslant \|p(N)\|$, dus gelijkheid volgt.

(*ii*) We weten al dat $N - \lambda\mathbb{1}$ inverteerbaar is als $S - \lambda\mathbb{1}$ inverteerbaar is, en vermits $(\sigma(A))^{-1} = \sigma(A^{-1})$ voor elke begrensde inverteerbare operator A, kunnen we het bewijs verder zetten als hierboven.

∎

We kunnen een nauwkeuriger resultaat formuleren i.v.m. het spectrum van een subnormale operator. Dit werd bewezen in [4]. We voeren eerst een begrip in:

5.8 Definitie

Zij V een compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$, dan noemen we de begrensde componenten van V^c 'de gaten van V'. ▲

5.9 Stelling

Zij N de minimale normale uitbreiding van de subnormale S. $\sigma(S)$ is de unie van $\sigma(N)$ en een aantal gaten van $\sigma(N)$.

Bewijs :
We bewijzen eerst dat $\sigma(S) \subseteq \sigma(N) \cup H(N)$, waarbij $H(N)$ de gaten van $\sigma(N)$ zijn. Vervolgens tonen we aan dat een gat van $\sigma(N)$ ofwel bevat is in $\sigma(S)$, ofwel disjunct ervan.

- Zij $\lambda \notin \sigma(N) \cup H(N)$. Dan is $f(z) := (z - \lambda)^{-1}$ continu op $\sigma(N) \cup H(N)$ en analytisch op zijn inwendige. Dus, door de stelling van Mergelyan[2] bestaat er een rij van polynomen $(p_n)_n$ in z zodat $p_n(z) \to f(z)$ uniform op $\sigma(N) \cup H(N)$. Dus zal $\|p_n(N) - (N - \lambda\mathbb{1})^{-1}\| \to 0$, dus $(p_n(N))_n$ is een Cauchyrij (voor de normtopologie). Door lemma 5.7 is $(p_n(S))_n$ ook Cauchy en convergeert naar een zekere R. Vermits nu $\|p_n(N)(N - \lambda\mathbb{1}) - \mathbb{1}\|$ en $\|(N - \lambda\mathbb{1})p_n(N) - \mathbb{1}\|$ naar 0 convergeren, zullen $\|p_n(S)(S - \lambda\mathbb{1}) - \mathbb{1}\|$ en $\|(S - \lambda\mathbb{1})p_n(S) - \mathbb{1}\|$ ook naar 0 convergeren, zodat $R(S - \lambda\mathbb{1}) = (S - \lambda\mathbb{1})R = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; \lambda \notin \sigma(S)$.
- Uit eigenschap 5.4 weten we al dat $\sigma(N) \subseteq \sigma(S)$ en $\sigma_{ap}(S) \subseteq \sigma_{ap}(N)$. Zij nu G een gat van $\sigma(N)$. Stel $G_1 := G \setminus \sigma(S)$ en $G_2 := G \cap \sigma(S)$. We beweren nu dat G_1 en G_2 allebei open zijn, maar vermits deze twee verzamelingen disjunct zijn en hun unie samenhangend is, zal dit impliceren dat een van de twee leeg

[2] Stelling (Mergelyan)[31]
Zij $K \subset \mathbb{C}$ compact, zodat K^c samenhangend is, en zij f een functie die analytisch is op het inwendige van K, dan bestaat er een rij van polynomen die uniform naar f convergeert op heel K.

is. Vermits G open is en $\sigma(S)$ gesloten, zal G_1 open zijn. Zij nu $\lambda \in G_2$, dan is al zeker $\lambda \notin \sigma(N)$, dus $\lambda \notin \sigma_{ap}(N)$ en $\lambda \notin \sigma_{ap}(S)$, waaruit we dan weer halen dat λ niet op de rand van van $\sigma(S)$ ligt. Maar $\lambda \in G_2 \subseteq \sigma(S)$, dus λ zit in het inwendige van $\sigma(S)$. Dus G_2 is in feite de doorsnede van G met het inwendige van $\sigma(S)$, allebei open verzamelingen, dus ook G_2 is open.

∎

5.10 Voorbeeld

We gaan bovenstaande stelling eens nagaan voor de éénzijdige shift op $\ell^2(\mathbb{N})$. Uit voorbeeld 1.3 weten we al dat deze subnormaal is met als minimale normale uitbreiding de tweezijdige shift op $\ell^2(\mathbb{Z})$.

We berekenen het spectrum van de eenzijdige shift U_+. Omdat $\|U_+\| = 1$, zal al zeker $\sigma(U_+) \subseteq \overline{B(0,1)}$. We berekenen nu $R\sigma(U_+)$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in R\sigma(U_+) &\Leftrightarrow \overline{\mathrm{Ran}\,(\lambda \mathbb{1} - U_+)} \neq \ell^2(\mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow \exists \eta \neq 0, \forall \xi : \quad \langle \eta, (\lambda \mathbb{1} - U_+)\xi \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \eta \neq 0, \forall \xi : \quad \sum_{i \geqslant 0} \eta_i (\bar{\lambda}\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_{i-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \eta \neq 0, \forall \xi : \quad \sum_{i \geqslant 0} (\bar{\lambda}\eta_i - \eta_{i+1})\bar{\xi}_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \eta \neq 0, \forall i \in \mathbb{N} : \quad \bar{\lambda}\eta_i = \eta_{i+1} \\
&\Leftrightarrow \exists \eta \neq 0, \forall i \in \mathbb{N} : \quad \eta_i = \bar{\lambda}^i \eta_0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \geqslant 0} |\lambda|^{2i} < \infty,
\end{aligned}$$

dus $R\sigma(U_+) = B(0,1)$. Omdat $B(0,1) \subseteq \sigma(U_+) \subseteq \overline{B(0,1)}$, en het spectrum altijd compact is, weten we $\sigma(U_+) = \overline{B(0,1)}$.

De minimale normale uitbreiding van U_+ is de tweezijdige shift U_+^-. We zoeken hiervan het spectrum. Omdat U_+^- unitair is, zal al zeker $\sigma(U_+^-) \subseteq \mathbb{T}$, met $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| = 1\}$. Zij nu $\lambda \in \mathbb{T}$, we beweren dat $\lambda \mathbb{1} - U_+^-$ niet surjectief is. Kies een $\nu \in \mathbb{T}$ zodat $\lambda + \nu \neq 0$ en zij $\xi = (\ldots, 0, 0, \nu, 0, 0, \ldots)$. Stel er bestaat een η zodat $\xi = (\lambda \mathbb{1} - U_+^-)\eta$. dan moet voor alle i: $\xi_i + \eta_{i-1} = \lambda \eta_i$. Dan geldt voor alle plaatsen links van de ν in ξ, zowel als voor alle plaatsen rechts ervan, dat $|\xi_k|$ een constante is, en omdat de rij kwadratisch sommeerbaar moet zijn, moet deze constante 0 zijn voor beide helften. Maar dit kan duidelijk niet. Dus $\sigma(U_+^-) = \mathbb{T}$.

Dit is dus een mooie illustratie van stelling 5.9. Merk op dat we door deze stelling toekomen met een van de twee spectra te berekenen. Als we het spectrum kennen van U_+, en we weten dat $\sigma(U_+^-) \subseteq \mathbb{T}$, dan moet gelijkheid gelden, anders zou $\sigma(U_+^-)$ geen gaten hebben, en dus zou $\sigma(U_+) \neq \overline{B(0,1)}$. Omgekeerd, als we weten dat $\sigma(U_+^-) = \mathbb{T}$, dan is het voldoende om voor één punt λ uit $B(0,1)$ na te gaan of $\lambda\mathbb{1} - U_+$ inverteerbaar is, om te concluderen of nu $\sigma(U_+) = \mathbb{T}$ of $\overline{B(0,1)}$. ★

5.11 Propositie [5]

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een subnormale operator, dan is $\lambda \in \rho_n(S)$ <u>asa</u> er een $\alpha > 0$ bestaat zodat:

$$\sum_{i,j=0}^{n} B_i^* S^{*j} (S - \lambda\mathbb{1})^* (S - \lambda\mathbb{1}) S^i B_j \;\geqslant\; \alpha \sum_{i,j=0}^{n} B_i^* S^{*j} S^i B_j, \tag{10}$$

voor alle $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$.

Bewijs :
Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ de minimale normale uitbreiding van S. Omdat voor een normale operator geldt dat het spectrum gelijk is aan het benaderend puntspectrum, weten we dat

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho_n(S) \;&\Leftrightarrow\; \lambda \in \rho(N) \\
&\Leftrightarrow\; \mathbb{N} - \lambda\mathbb{1} \text{ is langs onder begrensd} \\
&\Leftrightarrow\; \exists \alpha > 0 \text{ zodat } \|(N - \lambda\mathbb{1})\xi\|^2 \geqslant \alpha\|\xi\|^2 \text{voor alle } \xi \in \mathfrak{H}.
\end{aligned}$$

We weten dat $\mathfrak{K} = \bigvee\{N^{*i}\xi \mid \xi \in \mathfrak{H}, i \in \mathbb{N}\}$. Dus $\lambda \in \rho_n(S)$ <u>asa</u> er bestaat een $\alpha > 0$ zodat $\|(N - \lambda\mathbb{1})\sum_{i=0}^{n} N^{*i}\xi_i\|^2 \geqslant \alpha\|\sum_{i=0}^{n} N^{*i}\xi_i\|^2$, voor elke eindige verzameling $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$. We kunnen deze laatste ongelijkheid herschrijven:

$$\begin{aligned}
\langle (N - \lambda\mathbb{1}) \sum_{j=0}^{n} N^{*j}\xi_j, (N - \lambda\mathbb{1}) \sum_{i=0}^{n} N^{*i}\xi_i \rangle \;&\geqslant\; \alpha \langle \sum_{j=0}^{n} N^{*j}\xi_j, \sum_{i=0}^{n} N^{*i}\xi_i \rangle \\
&\Updownarrow \\
\sum_{i,j=0}^{n} \langle (N - \lambda\mathbb{1}) N^i \xi_j, (N - \lambda\mathbb{1}) N^j \xi_i \rangle \;&\geqslant\; \alpha \sum_{i,j=0}^{n} \langle N^i\xi_j, N^j\xi_i \rangle \\
&\Updownarrow \\
\sum_{i,j=0}^{n} \langle (S - \lambda\mathbb{1}) S^i \xi_j, (S - \lambda\mathbb{1}) S^j \xi_i \rangle \;&\geqslant\; \alpha \sum_{i,j=0}^{n} \langle S^i\xi_j, S^j\xi_i \rangle.
\end{aligned} \tag{11}$$

We weten dus al dat $\lambda \in \rho_n(S)$ <u>asa</u> (11) geldt voor een $\alpha > 0$ en elke eindige verzameling $\{\xi_0, \xi_1 \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$.

Zij nu $\xi \in \mathfrak{H}$, zij dan $\xi_i = B_i\xi$ voor $0 \leqslant i \leqslant n$ en $B_i \in C^*(S)$. We krijgen dan

$$\langle \sum_{i,j=0}^{n} B_i^* S^{*j} (S - \lambda \mathbb{1})^* (S - \lambda \mathbb{1}) S^i B_j \xi, \xi \rangle \quad \geqslant \quad \alpha \langle \sum_{i,j=0}^{n} B_i^* S^{*j} S^i B_j \xi, \xi \rangle,$$

wat we moesten bekomen.

Voor de omgekeerde implicatie is het weer voldoende om aan te nemen dat S *-cyclisch is (zie het bewijs van stelling 4.4. Zij dus η een *-cyclische vector voor S, dus $\mathfrak{H} = \overline{C^*(S)\eta}$. Zij $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$, dan volgt uit (10) dat (11) geldt voor $\xi_k = B_k\eta$. Maar aangezien (11) dus geldt voor een dichte deelverzameling, geldt ze voor heel $\mathfrak{H}$. ∎

§ 6 Cyclische subnormale operatoren

Het eerste deel van deze paragraaf komt uit [9].

6.1 Lemma

*Zij S een cyclische subnormale operator op $\mathfrak{H}$, met cyclische vector ξ, dan is de minimale normale uitbreiding N van S (op $\mathfrak{K}$) *-cyclisch, en ξ is een *-cyclische vector voor N.*

BEWIJS :
We weten $\mathfrak{H} = \bigvee\{S^n\xi \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zij $\mathfrak{M} = \bigvee\{N^{*m}N^n\xi \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, dan is $\mathfrak{M}$ een reducerende deelruimte voor N die $\mathfrak{H}$ omvat (omdat $N^n\xi = S^n\xi$). Dus $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}$. ∎

6.2 Definitie

Zij A een operator op $\mathfrak{H}$, $\xi \in \mathfrak{H}$, en K een compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$ die $\sigma(A)$ bevat. Men noemt ξ een $Rat(K)$-cyclische vector voor A als $\overline{\{u(A)\xi \mid u \in Rat(K)\}} = \mathfrak{H}$. A is dan een $Rat(K)$-cyclische operator. ▲

Herinner de operator N_μ: vermenigvuldiging met de identieke functie op $L^2(K, \mu)$, voor een zekere $K \subset \mathbb{C}$. We gaan het resultaat: Elke *-cyclische normale operator is equivalent aan N_μ voor een zekere maat μ uitbreiden naar subnormale operatoren:

6.3 Stelling

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een subnormale operator met minimale normale uitbreiding $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$. Stel dat S een $Rat(K)$-cyclische vector ξ heeft, dan bestaat er een unieke maat μ op K (met compacte drager) en een isomorfisme $U : \mathfrak{K} \to L^2(\mu)$ zodat:

(i) $U\mathfrak{H} = R^2(K, \mu)$;

(ii) $U\xi = 1$;

(iii) $UNU^{-1} = N_\mu$;

(iv) $V := U|_{\mathfrak{H}}$ *is een isomorfisme van* $\mathfrak{H}$ *naar* $R^2(K,\mu)$ *en* $VSV^{-1} = N_\mu|_{R^2(K,\mu)}$.

Bewijs :
Bekijk $\mathcal{L} := \bigvee(\{N^{*n}N^k\xi|n,k \in \mathbb{N}\})$. $\mathcal{L}$ is een reducerende deelruimte van $\mathfrak{K}$ voor N. Ook geldt $\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{L}$; immers $\bigvee\{\bar{z}^n z^k|n,k \in \mathbb{N}\} = C(K)$ door de stelling van Stone-Weierstrass[3], en vermits $Rat(K) \subset C(K)$, geldt $u(S)\xi = u(N)\xi \in \mathcal{L}$.

(Bekijk de matrixdecompositie $N = \begin{pmatrix} S & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Omdat voor een veelterm p in één veranderlijke geldt $p(N) = \begin{pmatrix} p(S) & \bigstar \\ 0 & \bigstar \end{pmatrix}$, zullen ook veeltermen in S subnormaal zijn. Omdat voor alle operatoren A, B, C ook geldt: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, als de inversen bestaan, bekomen we voor alle $u \in Rat(K)$: $u(S)\xi = u(N)\xi$, voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$.)

Dus $\mathcal{L} = \mathfrak{K}$ en ξ is een *-cyclische vector voor N. Bijgevolg bestaat er een unieke maat μ (met compacte drager) en een isomorfisme $U : \mathfrak{K} \to L^2(\mu)$ zodat $U\xi = 1$ en $UNU^{-1} = N_\mu$ ((*ii*) en (*iii*)). Uit de stelling van Fuglede-Putnam[4] volgt dus dat ook $UN^*U^{-1} = N_\mu^*$. Voor elke veelterm p in twee variabelen geldt dus dat $Up(N,N^*) = p(N_\mu, N_\mu^*)U$, zodat ook $U\phi(N) = \phi(N_\mu)U$ voor elke continue functie ϕ. Dus voor $u \in Rat(K) \subset C(K)$: $Uu(S)\xi = Uu(N)\xi = u$, en als we nu hiervan limieten nemen vinden we (*i*) terug, en (*iv*) volgt hieruit ook onmiddellijk. ∎

Zij $P^2(\mu)$ de $L^2(\mu)$-sluiting van de veeltermen. We definiëren voor elke maat μ met compacte drager de operator $S_\mu : \ P^2(\mu) \to P^2(\mu) : \ p \mapsto zp$. We krijgen dan het eenvoudige gevolg:

6.4 Gevolg

S is een cyclische subnormale operator <u>asa</u> *S unitair equivalent is aan* S_μ *voor een zeker maat* μ*, met compacte drager, op* $\mathbb{C}$.

[3]<u>Stelling (Stone-Weierstrass)</u>[30]
Zij X een compacte Hausdorffruimte en $\mathcal{A}$ een gesloten deelalgebra van $C(X)$ zodat de constante functies tot $\mathcal{A}$ behoren, $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ de punten van X separeert, dan is $\mathcal{A} = C(X)$.

[4]<u>Stelling (Fuglede-Putnam)</u>[22]
Zij N en M normale operatoren op resp. $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$ en zij $V : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ een operator zodat $VN = MV$, dan is ook $VN^* = M^*V$.

BEWIJS :
$Rat(\mathbb{C}) = P^2(\mu)$. ∎

6.5 Iets over onbegrensde operatoren

In de volgende stelling zullen we 'onbegrensde' (niet noodzakelijk begrensde) functies integreren t.o.v. een spectrale maat. Dit geeft aanleiding tot onbegrensde operatoren. Dus eerst een woordje uitleg. Voor de details, zie [30].

Zij A een lineaire afbeelding (dus niet noodzakelijk continu) van een dichte deelruimte $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{H}$ (het domein van A) naar $\mathfrak{H}$ (met $\mathfrak{H}$ een Hilbertruimte), dan is A een (onbegrensde) operator.

Zij $\eta \in \mathfrak{H}$ zodat er een ν_η bestaat zodat voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$: $\langle A\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \nu_\eta \rangle$. De verzameling van al dergelijke η's noemen we $\mathfrak{D}(A^*)$. Als deze verzameling dicht is, definiëren we een operator op $\mathfrak{D}(A^*)$: $A^*\eta = \nu_\eta$, de toegevoegde van A. Dit is een beetje delicater dan in het begrensde geval, en in het algemeen geldt nu niet meer $(A^*)^* = A$.

Zij E een spectrale maat op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ en f een meetbare functie. Dan kan bewezen worden dat $\mathfrak{D}_f = \{\xi \in \mathfrak{H} | \int |f(z)|^2 \, d\langle E(z)\xi, \xi \rangle\}$ een dichte deelverzameling is van $\mathfrak{H}$. We kunnen een operator $\int f \, dE$ definiëren, met domein $\mathfrak{D}_f$, door een rij van begrensde functies $(f_n)_n$ te nemen die naar f convergeert, en de limiet van $\int f_n \, dE$ te bekijken. We noteren deze operator ook $f(A)$, waarbij A de operator $\int z \, dE$ is.

Een operator A noemen we gesloten, indien $\{(\xi, A\xi) | \ \xi \in \mathfrak{D}(A)\}$ gesloten is in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Een nuttige stelling hierover:

6.5.1 Stelling

Zij A een operator, dan is A^* (als deze bestaat) gesloten.

Hieruit volgt dat elke integraal van een meetbare functie f (t.o.v. een spectrale maat E) gesloten is, immers:

$$\int f \, dE \;=\; \left(\int \bar{f} \, dE \right)^* .$$

Een interessante stelling is ook:

6.5.2 Stelling

Zij f een meetbare functie en E een spectrale maat op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- $\int f\, dE \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$
- *f is E-essentieel begrensd*
- $\mathfrak{D}_f = \mathfrak{H}$

De rest van de paragraaf is afkomstig uit [38].

6.6 Stelling

Zij S een subnormale operator op $\mathfrak{H}$ met cyclische vector ξ. Zij $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat T commuteert met S, dan is T subnormaal. Ook bestaat er dan een meetbare functie $p_T \in P^\infty(\mu) = P^2(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ zodat $T = p_T(N)|_{\mathfrak{H}}$, waar $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ de minimale normale uitbreiding is van S en μ de scalaire spectrale maat van N behorende bij ξ.

Bewijs :
Omdat $\mathfrak{H} = \bigvee\{S^n\xi |\ n \in \mathbb{N}\}$, bestaat er voor elke $T\xi \in \mathfrak{H}$ een rij polynomen $(p_n)_n$ zodat $T\xi = \lim_{n\to\infty} p_n(S)\xi$ (in de normtopologie). Vermits $p_n(S)\xi = p_n(N)\xi$ voor elke n, geldt

$$\int |p_n(z) - p_m(z)|^2\, d\mu(z) \quad \to \quad 0,$$

als $m, n \to \infty$. Dus bestaat er een functie $p_T \in P^2(\mu)$ zodat $p_n \to p_T$. Dus $p_n(S)\xi = p_n(N)\xi$ convergeert zowel naar $T\xi$ als naar $p_T(N)\xi$, zodat $T\xi = p_T(N)\xi$.

Merk op dat, omdat $p_T \in P^2(\mu)$, $\xi \in \mathfrak{D}_{p_T}$. Omdat nu T commuteert met S, krijgen we dat voor elke polynoom p:

$$\begin{aligned} Tp(S)\xi &= p(S)T\xi \\ &= p(N)p_T(N)\xi \\ &= p_T(N)p(N)\xi \\ &= p_T(N)p(S)\xi, \end{aligned}$$

zodat $p(S)\xi \in \mathfrak{D}_{p_T}$. Nu is $p_T(N)$ een gesloten operator, en omdat

$$\overline{\{p(S)\xi |\ p \text{ een polynoom}\}} \quad = \quad \mathfrak{H},$$

moet $\mathfrak{D}_{p_T} \supseteq \mathfrak{H}$. Zij dus nu $\eta \in \mathfrak{H}$, en zij $(q_n)_n$ een rij polynomen zodat $q_n(S)\xi \to \eta$, dan convergeert $p_T(N)q_n(S)\xi = Tq_n(S)\xi$ naar $T\eta$ en naar $p_T(N)\eta$, zodat $p_T(N)\eta = T\eta$, voor alle $\eta \in \mathfrak{H}$. (dit leert ons ook $p_T(N)^n\eta = T^n\eta$, voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\eta \in \mathfrak{H}$)

Bekijk nu $\mathfrak{M} = \bigvee\{p_T(N)^{*n}\eta |\ \eta \in \mathfrak{H}, n \in \mathbb{N}\}$, dan zal $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}$. Dan is, omdat N en N^* commuteren met $p_T(N)^{*n}$, voor elke n, $\mathfrak{M}$ een reducerende deelruimte voor N. Dus $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}$.

Voor elke eindige collectie $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ in $\mathfrak{H}$ hebben we nu:

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{r} \langle T^n\eta_m, T^m\eta_n\rangle &= \sum_{m,n=0}^{r} \langle p_T(N)^n\eta_m, p_T(N)^m\eta_n\rangle \\ &= \left\|\sum_{n=0}^{r} p_T(N)^{*n}\eta_n\right\| \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

Zodat uit het Halmos-Bram criterium 4.2 volgt dat T subnormaal is.

Uit Lemma 4.1 weten we ook dat er een constante c bestaat, zodat

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{r} \langle T^{n+1}\eta_m, T^{m+1}\eta_n\rangle &\leqslant c \sum_{m,n=0}^{r} \langle T^n\eta_m, T^m\eta_n\rangle \\ &\Updownarrow \\ \sum_{m,n=0}^{r} \langle p_T(N)^{n+1}\eta_m, p_T(N)^{m+1}\eta_n\rangle &\leqslant c \sum_{m,n=0}^{r} \langle p_T(N)^n\eta_m, p_T(N)^m\eta_n\rangle \\ &\Updownarrow \\ \left\|p_T(N)\sum_{n=0}^{r} p_T(N)^{*n}\eta_n\right\| &\leqslant c \left\|\sum_{n=0}^{r} p_T(N)^{*n}\eta_n\right\|,\end{aligned}$$

waaruit we kunnen besluiten dat $p_T(N)$ begrensd is op een dichte deelverzameling van $\mathfrak{K}$, en omdat $p_T(N)$ gesloten is, op heel $\mathfrak{K}$. p_T is dus een element van $L^\infty(\mu)$. ∎

Hieruit halen we eenvoudig dat als T een operator is die commuteert met een cyclische subnormale S zowel als met S^*, dat T noodzakelijk normaal is. Immers, dan commuteren T en T^* met S, en zijn dus allebei subnormaal. Omdat ze allebei dan ook hyponormaal zijn, is T normaal. Als we dit combineren met de stelling van Fuglede-Putnam (zie voetnoot 4, p. 47), vinden we volgend resultaat:

6.7 Gevolg

Zij N een cyclische normale operator en zij T een operator die met N commuteert, dan is T ook normaal.

Bewijs :
Immers, omdat $TN = NT$, is ook $TN^* = N^*T$, dus ook $T^*N = NT^*$. Omdat een normale operator (triviaal) ook subnormaal is, zijn zowel T als T^* subnormaal, dus hyponormaal. Bijgevolg is T normaal. ∎

Zij nu $\{S\}'$ de verzameling van alle operatoren die commuteren met de cyclische subnormale $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Uit stelling 6.6 weten we dan dat er voor elke $T \in \{S\}'$ een functie $p_T \in P^\infty(\mu)$ bestaat zodat $T = p_T(N)|_{\mathfrak{H}}$ (met N de minimale normale uitbreiding van S en μ de scalaire spectrale maat horende bij de cyclische vector van S). Zij nu L_S de verzameling van al dergelijke functies.

6.8 Lemma

$L_S = P^\infty(\mu)$.

Bewijs :

($\subseteq$) volgt direct uit stelling 6.6.

($\supseteq$) Zij $p \in P^\infty(\mu)$, dan bestaat er dus een rij polynomen $(p_n)_n$ zodat

$$\int |p_n(z) - p(z)|^2 \, d\mu(z) \to 0.$$

Dus zal (met ξ de cyclische vector van S) $\|(p_n(N) - p(N))\xi\| \to 0$, zodat $p(N)\xi \in \mathfrak{H}$. Zij nu q een polynoom, dan is

$$\begin{aligned} p(N)q(S)\xi &= p(N)q(N)\xi \\ &= q(N)p(N)\xi \\ &= q(S)p(N)\xi \\ &\in \mathfrak{H}, \end{aligned}$$

dan is, omdat $\mathfrak{H} = \bigvee\{S^n\xi|\ n \in \mathbb{N}\}$, $p(N)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$. Ook kunnen we eenvoudig nagaan dat $p(N)|_{\mathfrak{H}}$ commuteert met S:

$$\begin{aligned} p(N)S\eta &= p(N)N\eta \\ &= Np(N)\eta \\ &= Sp(N)\eta, \end{aligned}$$

voor elke $\eta \in \mathfrak{H}$. Per definitie zal dus $p \in L_S$.

∎

§ 7 Een functiecalculus

We gaan een functiecalculus ontwikkelen voor subnormale operatoren. Hiervoor gaan we natuurlijk gebruik maken van de functiecalculus die al bestaat voor de minimale normale uitbreiding. Het grootste deel van het materiaal komt uit [9].

7.1 Lemma

Zij $(A_n)_n$ een rij van operatoren zodat $\|A_n - A\| \to 0$ en zij U een open rond $\sigma(A)$. Dan bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n > n_0 : \ \sigma(A_n) \subset U$.

BEWIJS :
Stel: dit is niet waar. Dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een $N > n$ zodat $\sigma(A_N) \cap U^c \neq \emptyset$. Door over te gaan op een deelrij vinden we dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $\lambda_n \in \sigma(A_n) \cap U^c$. Nu convergeert $(\|A_n\|)_n$ naar $\|A\|$, dus bestaat er een M zodat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\|A_n\| \leqslant M$ (immers, een convergente rij is begrensd). Omdat voor iedere n: $\lambda_n \in \sigma(A_n)$, zal voor elke n: $\lambda_n \leqslant M$, dus de λ_n zitten in een compacte verzameling. Omdat $\mathbb{C}$ metriseerbaar is, bestaat er een convergente deelrij van $(\lambda_n)_n$. Door over te gaan op die deelrij, en met λ de limiet daarvan, bekomen we: $\lambda_n \in U^c$ voor elke n, en dus $\lambda \in U^c$ (want U^c is gesloten). We weten ook dat de niet-inverteerbare operatoren een gesloten verzameling vormen, en vermits $\|(A_n - \lambda_n \mathbb{1}) - (A - \lambda \mathbb{1})\| \to 0$, is $\lambda \in \sigma(A)$. Dit is natuurlijk een tegenspraak. ∎

7.2 Stelling

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ subnormaal met minimale normale uitbreiding N. Definieer voor elke $f \in R(\sigma(S))$, $f(S) = f(N)|_{\mathfrak{H}}$, dan is de calculus $f \mapsto f(S)$ een multiplicatieve lineaire isometrie van $R(\sigma(S))$ naar $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ die de Riesz-calculus uitbreidt. Er geldt ook

$$\sigma(f(S)) \quad = \quad f(\sigma(S)) \quad \textit{voor alle } f \in R(\sigma(S)).$$

OPMERKINGEN:

- $f(N)$ is dus het beeld van f onder de Borelcalculus.

- De norm die we op $R(\sigma(S))$ beschouwen is $\|\,.\,\|_{\sigma(S)}$, de supremumnorm op $\sigma(S)$.

BEWIJS :
Merk op dat $Rat(\sigma(S))$ een deel is van de analytische functies op $\sigma(S)$ en dat door de stelling van Runge[5] elke analytische functie op $\sigma(S)$ in $R(\sigma(S))$ zit.

Zij f een analytische functie. Essentieel is dat $f(N)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$ en $f(N)|_{\mathfrak{H}} = f(S)$:

$$\begin{aligned}
f(N) &= f(\begin{pmatrix} S & F \\ 0 & G \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)(z\mathbb{1}_{\mathfrak{K}} - \begin{pmatrix} S & F \\ 0 & G \end{pmatrix})^{-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\begin{pmatrix} z\mathbb{1}_{\mathfrak{H}} - S & F \\ 0 & z\mathbb{1}_{\mathfrak{H}^\perp} - G \end{pmatrix}^{-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\begin{pmatrix} (z\mathbb{1} - S)^{-1} & -(z\mathbb{1} - S)^{-1}F(z\mathbb{1} - G)^{-1} \\ 0 & (z\mathbb{1} - G)^{-1} \end{pmatrix} dz \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)(z\mathbb{1} - S)^{-1}dz & -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)(z\mathbb{1} - S)^{-1}F(z\mathbb{1} - G)^{-1}dz \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)(z\mathbb{1} - G)^{-1}dz \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} `f(S)\text{'} & \bigstar \\ 0 & \bigstar \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

waarbij γ een kromme is die de unie van de spectra van al deze operatoren eenmaal in positieve zin omsluit. Met '$f(S)$' in de laatste stap wordt de Riesz-calculus bedoeld.

We zien dus dat $f(S)$, gedefinieerd als in de stelling, gelijk is aan '$f(S)$' gegeven door de Riesz-calculus. Dus multiplicatief en lineair zijn ook al in orde, voor analytische functies, en door limieten te nemen ook voor heel $R(\sigma(S))$.

Uit de Riesz-calculus leren we ook dat $\sigma(f(S)) = f(\sigma(S))$, en omdat $f(S)$ subnormaal is ($f(N)$ is normaal!), geldt $\|f\|_{\sigma(S)} = \|f(S)\|$ (de norm van een subnormale operator is gelijk aan zijn spectrale straal). Bijgevolg is $f \in Rat(\sigma(S)) \mapsto f(S)$ een isometrie, die dus uitbreidbaar is tot een isometrie op heel $R(\sigma(S))$.

We moeten nu enkel nog bewijzen dat $\sigma(f(S)) = f(\sigma(S))$ geldt op heel $R(\sigma(S))$.

---

[5] Stelling (Runge)[36]
Zij $\Delta \subset \mathbb{C}$ open en samenhangend. Beschouw een verzameling Γ die bestaat uit punten van $\Lambda := (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Delta$ en zodat in elke component van Λ minstens een punt van Γ ligt. Dan kan elke analytische functie op Δ benaderd worden (in de zin van uniforme convergentie op compacten) door rationale functies met polen in Γ.

Zij dus nu $f \in R(\sigma(S))$, en zij $(f_n)_n$ een rij in $Rat(\sigma(S))$ zodat $\|f_n - f\|_{\sigma(S)} \to 0$. Zeker geldt dus al $\sigma(f_n(S)) = f_n(\sigma(S))$ voor elke n.

($\subseteq$) Zij nu $\lambda \notin f(\sigma(S))$, dan bestaat er een n_0 zodat $\lambda \notin f_n(\sigma(S)) \quad \forall n \geqslant n_0$. Verder zal ook $(f_n - \lambda)^{-1} \to (f - \lambda)^{-1}$ uniform op $\sigma(S)$ (omdat λ niet bereikt wordt, is inverse nemen een continue bewerking). Dus is $g := (f - \lambda)^{-1} \in R(\sigma(S))$, want voor $n > n_0$, is $f_n^{-1} \in Rat(\sigma(S))$. Nu is $g(S)(f(S) - \lambda \mathbb{1}) = [g(f - \lambda)](S) = \mathbb{1}$, dus is $\lambda \notin \sigma(f(S))$.

($\supseteq$) Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Stel $\Lambda(\epsilon) := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ d(\lambda, \sigma(f(S))) < \epsilon\}$. Uit lemma 7.1 weten we dat er een n_1 bestaat zodat $f_n(\sigma(S)) = \sigma(f_n(S)) \subset \Lambda(\epsilon)$, $\forall n > n_1$. Ook bestaat er een n_2 waarvoor $\|f_n - f\|_{\sigma(S)} < \epsilon$ voor alle $n > n_2$. Door $n_0 = \max(n_1, n_2)$ te nemen, zien we dus dat $f(\sigma(S)) \subseteq \Lambda(2\epsilon)$. Vermits ϵ willekeurig was, volgt hieruit de gewenste inclusie.

∎

Hieruit leren we dat we door $R(\sigma(S))$ te kennen, ook eigenschappen van S zelf te weten kunnen komen. Een eenvoudig voorbeeldje:

7.3 Propositie

Zij S subnormaal. Als $R(\sigma(S)) = C(\sigma(S))$, dan is S normaal.

BEWIJS :
Zij $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \Re e(z)$ en $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \Im m(z)$. $f_{1,2}$ zijn dus elementen van $R(\sigma(S))$, door de veronderstelling. Uit bovenstaande stelling leren we dat $f_{1,2}(S)$ subnormale operatoren zijn met een reëel spectrum. Dus zijn $f_{1,2}(S)$ zelftoegevoegde operatoren (uit 5.5). Verder is, omdat $f_1 + if_2 = Id$, $S = f_1(S) + if_2(S)$. Dit is dus de cartesiaanse ontbinding van S. Omdat nu het reëel en imaginair gedeelte van S commuteren (want functies commuteren, en de calculus is een homomorfisme), is S normaal. (cfr. hyponormale operatoren en hun cartesiaanse ontbinding) ∎

OPMERKING:
We gebruikten alleen maar dat $\Re e(z)$ en $\Im m(z)$ in $R(\sigma(S))$ zitten, maar dit is equivalent met de gelijkheid in de stelling.

De calculus voor subnormale operatoren kan op een natuurlijke manier uitgebreid worden, vertrekkende van de Borelcalculus van de minimale normale uitbreiding:

7.4 Definitie

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ subnormaal en $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ zijn minimale normale uitbreiding; zij μ een scalaire spectrale maat voor N. Definieer voor alle $\phi \in L^\infty(\mu)$:

$$\phi(S)\xi \quad = \quad P(\phi(N)\xi),$$

met P de projectie van $\mathfrak{K}$ op $\mathfrak{H}$, en $\xi \in \mathfrak{H}$. ▲

Deze calculus voor subnormale operatoren ('de Borelcalculus') breidt de vorige uit, maar dit is geen homomorfisme meer (niet meer multiplicatief). Gelukkig blijven nog sommige eigenschappen overeind.

7.5 Propositie

met de notatie van definitie 7.4:
De afbeelding $L^\infty(\mu) \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}) : \phi \mapsto \phi(S)$ is een positieve injectieve contractie.

Bewijs :
Als ϕ positief is, dan is $\phi(N)$ ook positief, dus ook $\phi(S) = P\phi(N)P$. Aantonen dat deze afbeelding een contractie is, is ook eenvoudig: $\|\phi(S)\| = \|P\phi(N)\| \leqslant \|\phi(N)\| \leqslant \|\phi\|$. Om nu aan te tonen dat ze injectief is, veronderstel $\phi \in L^\infty(\mu)$ zodat $\phi(S) = 0$. Dit betekent dat $\phi(N)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^\perp$. Ook geldt voor elke $n \geqslant 1$ en $\xi \in \mathfrak{H}$: $\phi(N)N^{*n}\xi = N^{*n}\phi(N)\xi \in N^{*n}\mathfrak{H}^\perp \subseteq \mathfrak{H}^\perp$. Vermits N de minimale normale uitbreiding van S is, wil dit zeggen dat $\phi(N)\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}^\perp$. Als we dus $\phi(N)$ voorstellen als 2×2-operatormatrix op $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^\perp$, dan is $\phi(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$, voor zekere $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Omdat $\phi(N)$ normaal is, zal $A^*A = 0$, dus ook $A = 0$. Hieruit volgt $\phi(N)\mathfrak{H} = \{0\}$. Maar dan zal ook $\{0\} = N^{*k}\phi(N)\mathfrak{H} = \phi(N)N^{*k}\mathfrak{H}$ voor alle k, waaruit volgt (weer door minimaliteit van N) dat $\phi(N) = 0$. Maar dit impliceert dus $\phi = 0$ in L^∞. ∎

Als nu ϕ zo is dat $\mathfrak{H}$ een invariante deelruimte van $\phi(N)$ (dus dan is $\phi(S)\xi = P\phi(N)\xi = \phi(N)\xi$, voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$), dan is $\phi(S)$ ook subnormaal ($\phi(N)$ is een normale uitbreiding).

7.6 Propositie [27]

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een subnormale operator met minimale normale uitbreiding $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$. Zij $\phi \in L^\infty(\mu)$ (met μ een scalaire spectrale maat voor N), zodat $\phi(N)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, dan is $\sigma_n(\phi(S)) = \sigma(\phi(N))$.

Bewijs :
Zij $\mathfrak{M} = \bigvee\{\phi(N)^{*j}\xi|\ \xi \in \mathfrak{H}\}$, en zij $M = \phi(N)|_{\mathfrak{M}}$. Duidelijk is M de minimale normale uitbreiding van $\phi(S)$. $\mathfrak{M}$ is ook een invariante deelruimte voor N: $N\phi(N)^*\xi = \phi(N)^*N\xi$, voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$. Zij nu $S_1 = N|_{\mathfrak{M}}$, dan is N de minimale normale uitbreiding van S_1 (omdat $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}$).

Vermits $\phi(N) = M \oplus \phi(N)|_{\mathfrak{M}^\perp}$, is $\sigma(M) \subseteq \sigma(\phi(N))$ (inderdaad, als de inverse van $A \oplus B$ bestaat, voor willekeurige operatoren A en B, is die gelijk aan $A^{-1} \oplus B^{-1}$, en bestaan die inversen dus ook). Veronderstel $\sigma(\phi(N)) \setminus \sigma(M) \neq \emptyset$, en zij λ een element hierin. Kies een open verzameling Δ in $\sigma(\phi(N))$ (met de spoortopologie vanuit $\mathbb{C}$), zodat $\lambda \in \Delta$ en $\sigma(M) \cap \overline{\Delta} = \emptyset$.

Zij $\phi(N) = \int z\, dE(z)$ de spectrale ontbinding van $\phi(N)$, en zij P de projectie van $\mathfrak{K}$ op $\mathfrak{M}$. Dan is $PE(\Lambda) = E(\Lambda)P$, voor elke Borelverzameling Λ. Omdat er een bijectief verband is tussen de normale operatoren en spectrale maten (en dus de spectrale maat van een normale operator uniek bepaald is), is de spectrale maat $\tilde{E}$ van M gegeven door $\tilde{E}(\Lambda) = PE(\Lambda)P = PE(\Lambda)$.

Omdat nu $\sigma(M) \cap \overline{\Delta} = \emptyset$, is $\tilde{E}(\overline{\Delta}) = 0$. Dus $0 = PE(\overline{\Delta}) = E(\overline{\Delta})P$, zodat $E(\overline{\Delta})\mathfrak{K} \perp \mathfrak{M}$, zodat $(E(\overline{\Delta})\mathfrak{K})^\perp \supseteq \mathfrak{M}$. Nu is $E(\overline{\Delta})\mathfrak{K}$ (en dus ook $(E(\overline{\Delta})\mathfrak{K})^\perp$) een reducerende deelruimte voor N, immers, N en N^* commuteren met $\phi(N)$, en dus ook met $E(\overline{\Delta})$. Dus, omdat N de minimale normale uitbreiding is van S_1, moet $E(\overline{\Delta})\mathfrak{K} = \{0\}$, dus moet $E(\overline{\Delta}) = 0$, maar dit is in tegenspraak met het feit dat Δ een open deel is van $\sigma(\phi(N))$. ∎

7.7 Propositie

*Zij $A,\ S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, S subnormaal. Zij $\rho : C^*(S) \to C^*(A)$ een *-homomorfisme met $\rho(S) = A$, dan is A subnormaal en:*

(*i*) $\sigma_n(A) \subseteq \sigma_n(S)$

(*ii*) *Zij $f \in C(\sigma_n(S))$, dan is $f(A)$ goed gedefinieerd, $f(S) \in C^*(S)$, $f(A) \in C^*(A)$, en $\rho(f(S)) = f(A)$.*

Bewijs :
We weten al dat A subnormaal is (4.6).

(*i*) Stel: $\exists \lambda \in \sigma_n(A) \setminus \sigma_n(S)$. Zij f een continue functie op $\sigma_n(S) \cup \sigma_n(A)$ zodat $f|_{\sigma_n(S)} \equiv 0$ en $f(\lambda) \neq 0$. Zij $(p_k)_k$ een rij van polynomen in z en $\bar{z}$ die uniform convergeert naar f op $\sigma_n(S) \cup \sigma_n(A)$. Vermits ρ een *-homomorfisme is, is $\rho(p_k(S, S^*)) = p_k(A, A^*)$, en dus $\rho(f(S)) = f(A)$. Maar $f(S) = 0$, dus

$f(A) = 0$. Uit propositie 7.5 weten we dan dat $f = 0$ in $L^\infty(\nu)$, met ν een scalaire spectrale maat voor de minimale normale uitbreiding van A. Maar de (continue!) functie f is niet identiek 0 op de drager van ν $(= \sigma_n(A))$. Dit is een contradictie.

(ii) Door puntje *(i)* is $f(A)$ goed gedefinieerd. Weer kunnen we f uniform benaderen door een rij veeltermen $(p_k)_k$ in z en $\bar{z}$. Dus is duidelijk dat $f(S) \in C^*(S)$ en $f(A) \in C^*(A)$. Omdat voor elke k: $\rho(p_k(S, S^*)) = p_k(A, A^*)$, volgt ook dat $\rho(f(S)) = f(A)$

∎

§ 8 Een semi-spectrale ontbinding

8.1 Definitie

Zij $(X, \mathfrak{M})$ een meetbare ruimte. Een semispectrale maat F voor een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ is een afbeelding van $\mathfrak{M}$ naar de positieve operatoren op $\mathfrak{H}$ zodat $F(\emptyset) = 0$, $F(X) = \mathbb{1}$ en voor elke rij $(\Delta_n)_n$ van twee aan twee disjuncte Borelverzamelingen geldt $F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(\Delta_n)$. ▲

OPMERKINGEN:

- Andere benaming hiervoor zijn 'operatormaat' of 'positieve operatormaat'.
- Als een semispectrale maat F ook nog voldoet aan $F(\Delta \cap \Lambda) = F(\Delta)F(\Lambda)$, dan is F een spectrale maat.

Voor elke normale operator N bestaat er een spectrale maat E zodat $N = \int z\, dE(z)$. Omgekeerd geldt ook dat als E een spectrale maat is, dat $\int z\, dE(z)$ een normale operator is. We trachten dezelfde overeenkomst te vinden tussen een subnormale operator en een semispectrale maat.

8.2 Stelling (Naimark) [18]

Zij $\mathfrak{H}$ een Hilbertruimte en F een semispectrale maat op $\mathfrak{H}$, dan bestaat er een Hilbertruimte $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ en een spectrale maat E op $\mathfrak{K}$ zodat $F(.) = P_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{K}} E(.)|_{\mathfrak{H}}$.

BEWIJS :
Bekijk de ruimte $\mathfrak{K}_1$ van alle meetbare trapfuncties $X \to \mathfrak{H}$ (trapfuncties zijn functies t zodat $t(X)$ eindig is). Voor $f, g \in \mathfrak{K}_1$, zij $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$ een meetbare X-partitie zodat f en g constant zijn op elke Δ_k. Zij ξ_k en η_k de waarden die f resp. g hebben op Δ_k. Definieer dan een sesquilineaire vorm op $\mathfrak{K}_1$:

$$[f, g] \quad = \quad \sum \langle F(\Delta_k)\xi_k, \eta_k \rangle.$$

Merk op dat dit onafhankelijk is van de gekozen X-partitie (zolang de functies f en g maar constant zijn op elk element van de partitie). $\mathfrak{K}_0 = \{f \in \mathfrak{K}_1 | \ [f, f] = 0\}$ is een gesloten deelruimte van $\mathfrak{K}_1$:

- De constante functie 0 zit in $\mathfrak{K}_0$
- $f \in \mathfrak{K}_0 \Rightarrow \lambda f \in \mathfrak{K}_0$: $\quad [\lambda f, \lambda f] = |\lambda|^2[f,f]$, voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$
- $f, g \in \mathfrak{K}_0 \Rightarrow f + g \in \mathfrak{K}_0$:
  $[f+g, f+g] = [f,f] + [g,g] + 2\Re e([f,g]) \leqslant 2|[f,g]| \leqslant 2\sqrt{[f,f][g,g]} = 0$, waarbij we de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz gebruikt hebben in de voorlaatste stap.
- Zij $(f_\alpha)_\alpha$ een net in $\mathfrak{K}_0$ dat convergeert binnen $\mathfrak{K}_1$, dan is $\lim_\alpha f_\alpha \in \mathfrak{K}_0$, omdat een limiet door een eindige som en het scalair product schuift.

Zij nu $f \in \mathfrak{K}_0$ en $g \in \mathfrak{K}_1$ willekeurig. Dan leren we uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz dat $|[f,g]|^2 \leqslant [f,f][g,g] = 0$, dus dan $[f,g] = 0$. Hieruit volgt dat $[f + \mathfrak{K}_0, g + \mathfrak{K}_0] := [f,g]$ een goed gedefinieerde sesquilineaire vorm is op $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0$. Door de constructie is dit zelfs een scalair product. Bekijk dan de vervollediging $\mathfrak{K}$ van de prehilbertruimte $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0$. Door $\xi \in \mathfrak{H}$ af te beelden op de constante functie $\xi : X \to \mathfrak{H} : x \mapsto \xi$ kunnen we $\mathfrak{H}$ inbedden in $\mathfrak{K}$.

De afbeelding $E : \Delta \subset X \mapsto E(\Delta) : f \mapsto E(\Delta)f = \chi_\Delta f$ is een spectrale maat:

- $E(\Delta)$ is een projectie voor elke Δ: immers $E(\Delta)^* f = \chi_\Delta^* f = \chi_\Delta f = E(\Delta) f$ en $E(\Delta)^2 f = \chi_\Delta^2 f = \chi_\Delta f = E(\Delta) f$, voor iedere $f \in \mathfrak{K}$.
- $E(\emptyset) = 0$ en $E(X) = \mathbb{1}$
- $E(\Delta \cap \Gamma) f = \chi_{\Delta \cap \Gamma} f = \chi_\Delta \chi_\Gamma f = E(\Delta) E(\Gamma) f$
- Voor elke rij $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van twee aan twee disjuncte deelverzamelingen van X: $E(\bigcup \Delta_n) f = \chi_{\bigcup \Delta_n} f = \sum \chi_{\Delta_n} f = \sum E(\Delta_n)$

Zij nu P de projectie van $\mathfrak{K}$ op de inbedding van $\mathfrak{H}$ (dus voor elke $\xi \in \mathfrak{K}$ is $P\xi$ een constante functie!), dan zal voor alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$:

$$
\begin{aligned}
\langle PE(\Delta)\xi, \eta \rangle &= \langle F(X) PE(\Delta)\xi, \eta \rangle \\
&= [PE(\Delta)\xi, \eta] \\
&= [E(\Delta)\xi, P\eta] \\
&= [E(\Delta)\xi, \eta] \\
&= \langle F(\Delta)\xi, \eta \rangle + \langle F(\Delta^c) 0, \eta \rangle \\
&= \langle F(\Delta)\xi, \eta \rangle.
\end{aligned}
$$

∎

Volgende stelling werd reeds bewezen in [4], hier wordt echter de aanpak van [25] gevolgd.

8.3 Stelling

Een operator $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ is subnormaal <u>*asa*</u> *er een semispectrale maat F met compacte drager bestaat zodat $S^{*i}S^j = \int \bar{z}^i z^j \, dF(z)$, voor alle $i, j \in \mathbb{N}$.*

OPMERKINGEN:

- Als men de voorwaarde vervangt door $S = \int z \, dF(z)$, is de stelling niet meer waar. Men zou dan bekomen: $S = PN|_{\mathfrak{H}}$, wat natuurlijk niet voldoende is om te concluderen dat S subnormaal is.
- De integraal t.o.v. een semispectrale maat F kunnen we eigenlijk niet zomaar nemen. Wegens voorgaande stelling kunnen we echter eenvoudig deze integraal definiëren in functie van de spectrale maat E die deze uitbreidt, door $\int f \, dF = P\left(\int f \, dE\right) P$.

BEWIJS :

($\Rightarrow$) Zij S een subnormale operator op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ met minimale normale uitbreiding N op $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$. Bekijk de spectrale ontbinding $N = \int z \, dE(z)$ van N. We weten dat $S = N|_{\mathfrak{H}} = PN|_{\mathfrak{H}}$, met P de projectie van $\mathfrak{H}$ op $\mathfrak{K}$. Zij F gedefinieerd door $F(\Delta) = PE(\Delta)|_{\mathfrak{H}}$ voor elke Δ waarvoor E gedefinieerd is. Dan is F een semispectrale maat. Immers, $F(\emptyset) = 0$, $F(X) = \mathbb{1}$. Ook zal $F(\Delta)$ een positieve operator zijn voor elke Δ, want $E(\Delta)$ is een positieve operator, P is zelftoegevoegd en $F(\Delta) = PE(\Delta)P$. De σ-additiviteit van F volgt uit die van E; zij $(\Delta_n)_n$ een rij van paarsgewijs disjuncte verzamelingen,

$$\begin{aligned} F(\bigcup \Delta_n) &= PE(\bigcup \Delta_n)|_{\mathfrak{H}} \\ &= P\left(\sum E(\Delta_n)\right)\Big|_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum PE(\Delta_n)|_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum F(\Delta_n). \end{aligned}$$

Nu is $S^{*i}S^j = PN^{*i}N^j|_{\mathfrak{H}}$.

Inderdaad, $S^j = N^j|_{\mathfrak{H}}$ is direct duidelijk, en $S^{*i} = PN^{*i}$ geldt ook; bekijk immers de matrixdecompositie $N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ F^* & G^* \end{pmatrix}$. Inductief vinden we eenvoudig dat $N^{*n} = \begin{pmatrix} S^{*n} & 0 \\ \bigstar & \bigstar \end{pmatrix}$, voor iedere n,

$$\text{zodat } PN^{*i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{*n} & 0 \\ \bigstar & \bigstar \end{pmatrix} = S^{*n}.$$

Dus

$$\begin{aligned} S^{*i}S^j &= PN^{*i}N^j|_{\mathfrak{H}} \\ &= P\left(\int \bar{z}^i z^j \, dE(z)\right) P \\ &= \int \bar{z}^i z^j \, dF(z) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Zij F een semispectrale maat op $\mathfrak{H}$ zodat $S^{*i}S^j = \int \bar{z}^i z^j \, dF(z)$, voor alle $i, j \in \mathbb{N}$. Door de stelling van Naimark bestaat er een ruimte $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ en een spectrale maat E op $\mathfrak{K}$ zodat $F(.) = PE(.)|_H$, met P de projectie van $\mathfrak{K}$ op $\mathfrak{H}$. Dan is $N = \int z \, dE(z)$ een normale operator op $\mathfrak{K}$. Voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ geldt nu:

$$\begin{aligned} PN^{*i}N^j|_{\mathfrak{H}} &= P\left(\int \bar{z}^i z^j \, dE(z)\right) P \\ &= \int \bar{z}^i z^j \, dF(z) \\ &= S^{*i}S^j. \end{aligned}$$

Door de koppels $(i, j) = (1, 1),\ (1, 0)$ en $(0, 1)$ te bekijken vinden we

$$PN^*NP = S^*S \;=\; PN^*PNP,$$

zodat $PN^*(\mathbb{1} - P)NP = 0$ en equivalent hiermee $(\mathbb{1} - P)NP = 0$. Dus $N|_{\mathfrak{H}} = PN|_{\mathfrak{H}} + (\mathbb{1} - P)N|_{\mathfrak{H}} = S$.

∎

Er is nog een andere karakterisatie mogelijk van subnormale operatoren met behulp van de semispectrale maat. Hiervoor hebben we het begrip 'Hausdorff momentenrij' nodig.

8.4 Definitie

Een rij $(C_n)_n$ van operatoren op een Hilbertruimte noemt men een Hausdorff momentenrij als er een semispectrale maat F bestaat, op een interval $[a, b]$, zodat $C_n = \int_a^b z^n \, dF(z)$, voor elke $n \in \mathbb{N}$. ▲

MacNerney heeft in [23] aangetoond dat een rij $(C_n)_n$ van zelftoegevoegde operatoren op een Hilbertruimte $\mathfrak{H}$ een Hausdorff momentenrij is voor het interval $[a, b]$ <u>asa</u>

$$a \sum_{i,j=0}^{n} \langle \xi_i, C_{i+j}\xi_j \rangle \leqslant \sum_{i,j=0}^{n} \langle \xi_i, C_{i+j+1}\xi_j \rangle \leqslant b \sum_{i,j=0}^{n} \langle \xi_i, C_{i+j}\xi_j \rangle, \tag{12}$$

voor elke eindige verzameling $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$.

Uit bovenstaand resultaat, samen met enkele andere bekende feiten, kunnen we volgende karakterisatie halen:

8.5 Stelling [14]

Een operator S is subnormaal <u>asa</u> $(S^{*n}S^n)_n$ een Hausdorff momentenrij is, voor een interval $[0, b]$.

BEWIJS :
Deze twee feiten zijn ons al bekend:

- S is subnormaal <u>asa</u> $\sum_{j,k} \langle S^{j+k}\xi_k, S^{j+k}\xi_j \rangle \geqslant 0$ (stelling 4.7)
- $\sum_{j,k} \langle S^{j+k}\xi_k, S^{j+k}\xi_j \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{j,k} \langle S^{j+k+1}\xi_k, S^{j+k+1}\xi_j \rangle \leqslant c \sum_{j,k} \langle S^{j+k}\xi_k, S^{j+k}\xi_j \rangle$ (uit het bewijs van stelling 4.7)

Als S subnormaal is, dan geldt de rechterongelijkheid van (12) al zeker. De linkse geldt ook; zij immers $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}) = (0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, dan is duidelijk dat $\sum_{j,k} \langle S^{j+k+1}\xi_k, S^{j+k+1}\xi_j \rangle = \sum_{j,k} \langle S^{j+k}\eta_k, S^{j+k}\eta_j \rangle \geqslant 0$.

Omgekeerd volgt uit het feit dat $(S^{*n}S^n)_n$ een Hausdorff momentenrij is (voor het interval $[0, b]$) dat $\frac{0}{b} \leqslant \sum_{j,k} \langle S^{j+k}\xi_k, S^{j+k}\xi_j \rangle$. ∎

Het is al geweten dat elke quasinormale operator (A commuteert met A^*A) subnormaal is (voorbeeld 2.6). We kunnen nu het verschil tussen de twee mooi vatten. We weten dus dat S subnormaal is <u>asa</u> er een semispectrale maat F op $\mathbb{R}^+$ bestaat zodat $S^{*n}S^n = \int z^n \, dF(z)$. Dit kent een analogon voor quasinormale operatoren:

8.6 Eigenschap [14]

Een operator A is quasinormaal <u>asa</u> er bestaat een spectrale maat E op $\mathbb{R}^+$ zodat $A^{*n}A^n = \int z^n \, dE(z)$.

Bewijs :

- Als A quasinormaal is, dan geldt $A^{*n}A^n = (A^*A)^n$.

  > Inderdaad, voor $n = 1$ geldt de gelijkheid triviaal, stel dat ze geldt voor $n = k - 1$. Dan $(A^*A)^k = (A^*A)^{k-1}A^*A = A^{*(k-1)}A^{k-1}\underline{A^*}A$. Met behulp van de gelijkheid $AA^*A = A^*AA$ kunnen we de onderlijnde operator in vorige uitdrukking dus stapsgewijs naar voor brengen, zodat voor elke $n \in \mathbb{N}$: $A^{*n}A^n = (A^*A)^n$.

  Zij dus E de spectrale maat van A^*A (dit is een positieve operator!), dan geldt $A^{*n}A^n = \int z^n \, dE(z)$.

- Omgekeerd, als $A^{*n}A^n = \int z^n \, dE(z)$, met E een spectrale maat, dan leeft E alleen op $\mathbb{R}^+$, omdat $\int z \, dE(z)$ een positieve operator is. Ook geldt dan, door de calculus die geldt voor zelftoegevoegde operatoren, $A^{*n}A^n = (A^*A)^n$. We weten door vorige stelling ook dat A subnormaal is, en dus hyponormaal.

  Dus $A^{*2}A^2 - (A^*A)^2 = A^*(A^*A - AA^*)A = 0$, maar omdat $A^*A - AA^*$ positief is, moet ook $(A^*A - AA^*)A = 0$. Dus A is quasinormaal.

∎

§ 9 Een topologisch verband

Subnormale operatoren kunnen ook topologisch gedefinieerd worden in functie van de normale operatoren. Volgend resultaat toont duidelijk een sterke topologische samenhang aan tussen subnormale en normale operatoren. Deze paragraaf is gebaseerd op [11].

9.1 Stelling

S is subnormaal asa S de sterke limiet is van een net van normale operatoren.

Het bewijs hiervan is niet eenvoudig. Als we met rijen zouden mogen werken, was dit niet al te moeilijk geweest; maar de sterke operator topologie is niet metriseerbaar, dus rijen zijn niet voldoende.

Voor we de stelling bewijzen, geven we eerst enkele andere resultaten.

9.2 Lemma

Zij $(A_\alpha)_\alpha$ en $(B_\alpha)_\alpha$ netten in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ die sterk convergeren naar A resp. B. Zij $\sup_\alpha \|A_\alpha\| < \infty$, dan convergeert $(A_\alpha B_\alpha)_\alpha$ sterk naar AB.

Bewijs :
Voor elke $\xi \in \mathfrak{H}$ geldt:

$$\begin{aligned}
\|A_\alpha B_\alpha \xi - AB\xi\| &\leqslant \|A_\alpha B_\alpha \xi - A_\alpha B\xi\| + \|A_\alpha B\xi - AB\xi\| \\
&\leqslant \sup_\alpha \|A_\alpha\| \|B_\alpha \xi - B\xi\| + \|A_\alpha(B\xi) - A(B\xi)\| \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

∎

9.3 Stelling (Montel) [24]

Zij Δ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en zij $\mathfrak{F}$ een verzameling van analytische functies op Δ die uniform begrensd is op compacten in Δ, dan heeft elke rij $(f_n)_n$ in $\mathfrak{F}$ een deelrij die uniform convergeert op compacten.

Bewijs :
Zij $(f_n)_n$ een rij in $\mathfrak{F}$. Kies een aftelbaar dichte deelverzameling $C = \{z_1, z_2, \ldots\}$ van Δ. Voor elke gesloten schijf $D \subset \Delta$ bestaat er dus een constante $M(D)$ zodat $|f_n(z)| < M(D)$ voor elke $z \in D$ en $n \in \mathbb{N}$. Dus $|f_n(z_1)| < M(\{z_1\})$, voor iedere n. Dus bestaat er een deelrij $(f_{1,k}(z_1))_k$ die convergeert naar een zekere w_1. Als we deze functies toepassen op z_2 krijgen we weer een begrensde rij $(f_{1,k}(z_2))_k$, die dus weer een convergente deelrij $(f_{2,l}(z_2))_l$ bevat. Zo verder gaan levert ons een rij van rijen:

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{1,1}(z_1), & f_{1,2}(z_1), & f_{1,3}(z_1), & \ldots & \to & w_1 \\
f_{2,1}(z_2), & f_{2,2}(z_2), & f_{2,3}(z_2), & \ldots & \to & w_2 \\
f_{3,1}(z_3), & f_{3,2}(z_3), & f_{3,3}(z_3), & \ldots & \to & w_3 \\
f_{4,1}(z_4), & f_{4,2}(z_4), & f_{4,3}(z_4), & \ldots & \to & w_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

waarin de k-de rij convergeert naar een zeker complex getal w_k, en de functies van de n-de rij gekozen werden uit die van de $(n-1)$-de. Bekijk nu de rij $(f_{n,n})_n$. Dit is een deelrij van $(f_n)_n$, waarvoor $\lim_{l\to\infty} f_{l,l}(z_k) = w_k$ voor elke k. Dus die rij convergeert op een dichte deelverzameling van Δ.

Zij nu D een gesloten schijf binnen Δ, en zij $\epsilon > 0$. Uit de integraalformule van Cauchy volgt dat de functies $f_{n,n}$ uniform equicontinu zijn, d.w.z. er bestaat een $\delta > 0$ zodat voor elke $\xi, \eta \in D$ en voor elke $l \in \mathbb{N}$ zodat $|f_{l,l}(\xi) - f_{l,l}(\eta)| < \epsilon/3$ vanzodra $|\xi - \eta| < \delta$.

(Kies een kromme γ binnen Δ die D $1\times$ omsluit in positieve zin. Dit kan, omdat Δ open is, en D een gesloten schijf.

$$\begin{aligned}
|f_{l,l}(\xi) - f_{l,l}(\eta)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_\gamma \left(\frac{f_{l,l}(w)}{\xi - w} - \frac{f_{l,l}(w)}{\eta - w}\right) dw\right| \\
&\leqslant \frac{M(D)}{2\pi}\ \text{lengte}(\gamma)\ \sup_{w\in\gamma} \frac{|\xi - \eta|}{|\xi - w|\,|\eta - w|},
\end{aligned}$$

hetgeen we klein kunnen krijgen, vermits we γ kunnen kiezen zodat $d(D, \gamma) > 0$.)

Kies nu een eindig aantal punten $z_1, \ldots, z_k$ zodat elk punt in D op een afstand kleiner dan δ ligt $\{z_1, \ldots, z_k\}$. Vermits voor elke $i \in \{1, \ldots, k\}$: $\lim_{l\to\infty} f_{l,l}(z_i) = w_i$, is elk van deze rijen een Cauchyrij. Omdat we hier slechts te doen hebben met eindig veel van die rijen, bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat voor iedere $i \in \{1, \ldots, k\}$: $|f_{j,j}(z_i) - f_{l,l}(z_i)| < \epsilon/3$, vanzodra $j, l > m$.

Stel nu $j, l > m$, en $z \in D$. Dan bestaat er een $i \in \{1, \ldots, k\}$ zodat $|z - z_i| < \delta$, dus:

$$\begin{aligned}
|f_{j,j}(z) - f_{l,l}(z)| &\leqslant |f_{j,j}(z) - f_{j,j}(z_i)| + |f_{j,j}(z_i) - f_{l,l}(z_i)| + |f_{l,l}(z_i) - f_{l,l}(z)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

∎

We kunnen een topologie hechten aan deze eigenschap. Zij voor elke $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leqslant n \ \& \ d(z, \mathbb{C} \setminus \Delta) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Dan zal

- $K_{n-1} \subset \mathring{K}_n$ voor alle $n > 1$,
- $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,
- Voor elke compacte deelverzameling van Δ bestaat er een n zodat K_n die verzameling omvat.

Voor elke n kunnen we nu een seminorm op $H(\Delta)$ definiëren door $p_n(f) = \sup\{|f(z)|;\ z \in K_n\}$. Als we nu $H(\Delta)$ uitrusten met de topologie geïnduceerd door de familie $\{p_n\}_n$, wordt dit een volledige metriseerbare lokaal convexe ruimte. Convergentie in deze topologie is uniforme convergentie op compacten.

Doordat $H(\Delta)$ met deze topologie metriseerbaar is, kunnen we vorige stelling herformuleren:

9.4 Stelling

Zij Δ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en zij $\mathfrak{F}$ een verzameling van analytische functies op Δ die uniform begrensd is op compacten in Δ, dan is de sluiting van $\mathfrak{F}$ compact.

Van deze stelling hebben we nu een versie nodig die betrekking heeft op operatorwaardige functies. We hebben daarom een uitbreiding nodig van het begrip 'analytische functie'.

9.5 Definitie

Zij X een complexe Banachruimte en Δ een niet leeg open deel van $\mathbb{C}$. Een functie $f : \Delta \to X$ is analytisch als er voor iedere $z_0 \in \Delta$ een functie $g : \Delta \to X$ bestaat die continu is in z_0 en zo dat voor alle $z \in \Delta \setminus \{z_0\}$ geldt dat $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. ▲

Volgende propositie, uit [30], is zeer nuttig:

9.6 Propositie

Zij X een complexe Banachruimte, Δ een niet leeg open deel van $\mathbb{C}$ en f een functie van Δ naar $\mathbb{C}$.

Als f analytisch is, dan is voor elke continue $\phi : X \to \mathbb{C}$, de functie $\phi \circ f : \Delta \to \mathbb{C}$ analytisch (in de gewone zin).

Als voor elke continue $\phi : X \to \mathbb{C}$ de functie $\phi \circ f : \Delta \to \mathbb{C}$ analytisch is, dan is f ook analytisch (in de uitgebreide zin).

9.7 Stelling

Zij $\mathfrak{H}$ een Hilbertruimte en zij $\mathfrak{F}$ een familie van analytische functies van een open deel $\Delta \subset \mathbb{C}$ naar $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $\mathfrak{F}$ uniform begrensd is op gesloten schijven. Dan bestaat er voor elk net $(f_\alpha)_\alpha$ in $\mathfrak{F}$ een deelnet $(f_\beta)_\beta$ en een analytische functie $f : \Delta \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $f_\beta(z) \to f(z)$ in de zwakke operatortopologie, voor elke $z \in \Delta$.

Bewijs :

Zij C een aftelbaar dichte deelverzameling van $\mathfrak{H}$ en stel $C \times C = \{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots\}$. Voor elke $f \in \mathfrak{F}$ en $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $f_n(z) = \langle f(z)\xi_n, \eta_n \rangle$. Zij dan $\mathfrak{F}_n = \{f_n | \ f \in \mathfrak{F}\}$. Uit de stelling van Montel leren we nu dat elke $\mathfrak{F}_n$ compacte sluiting heeft in $H(\Delta)$. Dus door de stelling van Tychonoff[6] heeft $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n$ een compacte sluiting in $\prod_{n\in\mathbb{N}} H(\Delta)$ (met de producttopologie). We kunnen $\mathfrak{F}$ inbedden in $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n$ door f te identificeren met $(f_1, f_2, \ldots)$.

Zij nu $(f_\alpha)_\alpha$ een net in $\mathfrak{F}$. Dan bestaat er dus een deelnet $(f_\beta)_\beta$ in $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n$ dat convergeert. Dit wil zeggen dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $z \in \Delta$, $\langle f_\beta(z)\xi_n, \eta_n \rangle$ convergeert. Voor elke z is $(\|f_\beta(z)\|)_\beta$ begrensd, en C is dicht in $\mathfrak{H}$, dus er bestaat een operator $f(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $f_\beta(z) \to f(z)$ in de zwakke operatortopologie. We weten dan ook dat $\langle f(z)\xi_n, \eta_n \rangle \in H(\Delta)$ voor elke n, zodat $\langle f(z)\xi, \eta \rangle \in H(\Delta)$ voor elke $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, wegens de stelling van Montel. Uit propositie 9.6 volgt dan dat $f : \Delta \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ analytisch is. ∎

[6] Stelling (Tychonoff)[37]
Het Cartesisch product van compacte ruimten is terug compact.

9.8 Lemma

Zij $(N_\alpha)_\alpha$ een net van normale operatoren in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ met spectrale decomposities $N_\alpha = \int_{\mathbb{C}} z\, dE_\alpha(z)$. Stel dat $N_\alpha \to S$ in de sterke operatortopologie, dan convergeert $E_\alpha(\Delta)$ sterk naar $\mathbb{1}$, voor elke open Δ die $\sigma(S)$ omvat.

BEWIJS :
Zij voor elke α: $Q_\alpha = E_\alpha(\mathbb{C} \setminus \Delta)$. We moeten aantonen dat $Q_\alpha \to 0$ in de sterke operatortopologie, wat equivalent is met $Q_\alpha \to 0$ in de zwakke operatortopologie. Omdat $\|Q_\alpha\| = 1$ of 0 voor alle α, en de eenheidsbol in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zwak compact is (zie hiervoor [21]), heeft $(Q_\alpha)_\alpha$ een deelnet $(Q_\beta)_\beta$ zodat $Q_\beta \to T$ voor een zekere T.

Definieer nu voor elke β:

$$u_\beta : \Delta \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}) : \ z \mapsto u_\beta(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\Delta} \frac{1}{w - z}\, dE_\beta(w).$$

Dan geldt $\|u_\beta(z)\| \leqslant \frac{1}{d(z, \mathbb{C}\setminus\Delta)}$ voor elke $z \in \Delta$. $(u_\beta)_\beta$ is dan een net dat uniform begrensd is op gesloten schijven. Uit stelling 9.7 leren we dan dat er een analytische functie $u : \Delta \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ bestaat, en een deelnet $(u_\gamma)_\gamma$ van $(u_\beta)_\beta$, zodat $u_\gamma(z) \to u(z)$ voor elke $z \in \Delta$.

Neem nu een vaste $z \in \Delta$. Omdat $(N_\gamma - z\mathbb{1})$ sterk convergeert naar $S - z\mathbb{1}$, weten we uit lemma 9.2 dat $u_\gamma(z)(N_\gamma - z\mathbb{1})$ zwak convergeert naar $u(z)(S - z\mathbb{1})$. Nu geldt ook $u_\gamma(z)(N_\gamma - z\mathbb{1}) = Q_\gamma \to T$. Dus $u(z)(S - z\mathbb{1}) = T$ voor alle $z \in \Delta$. Hieruit volgt dat

$$f(z) \quad = \quad \begin{cases} u(z) & \text{als } z \in \Delta \\ T(S - z\mathbb{1})^{-1} & \text{als } z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(S) \end{cases}$$

een goed gedefinieerde functie is van $\mathbb{C}$ naar $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. f is dan een gehele functie, en omdat $f(z) = T(S - z\mathbb{1})^{-1} \to 0$ voor $z \to \infty$, zal f identiek 0 zijn. Dit kan enkel als $T = 0$.

We hebben dus aangetoond dat 0 het enige limietpunt is van het net $(Q_\alpha)_\alpha$, zodat $Q_\alpha \to 0$, wat we moesten bewijzen. ∎

Eindelijk hebben we genoeg materiaal om stelling 9.1 te kunnen bewijzen.

Bewijs van stelling 9.1:

- Zij S subnormaal op $\mathfrak{H}$ en zij $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale basis van $\mathfrak{H}$. Zij N de minimale normale uitbreiding van S, op $\mathfrak{K}$. Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$ een unitaire operator $U_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ die $\mathfrak{H}_n = \bigvee\{e_0, e_1, \ldots, e_n, Se_0, \ldots, Se_n\}$ invariant laat. Dit kan, kies immers een willekeurige unitaire operator $\tilde{U_n} : \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_n \to \mathfrak{K} \ominus \mathfrak{H}_n$ (die bestaat omdat $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$ gelijkmachtig zijn) en stel $U_n = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_n} \oplus \tilde{U_n}$. Definieer dan voor elke $n \in \mathbb{N}$ de normale operator $N_n = U_n^* N U_n$.

  Bekijk nu de prehilbertruimte $\tilde{\mathfrak{H}}$ voortgebracht door $\{e_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ (dit zijn alle eindige lineaire combinaties van deze vectoren). Voor een willekeurige $\xi \in \tilde{\mathfrak{H}}$ kan je een $n_\xi \in \mathbb{N}$ vinden zodat $\xi \in \mathfrak{H}_{n_\xi}$. Voor elke $n > n_\xi$ zal dan ook $\xi \in \mathfrak{H}_n$. Dus voor $n \geqslant n_\xi$ geldt $N_n\xi = U_n^* N U_n \xi = U_n^* N \xi = U_n^* S \xi = S\xi$. Omdat (per constructie) $\tilde{\mathfrak{H}}$ dicht is in $\mathfrak{H}$, is S de sterke limiet van $(N_n)_n$.

- Zij nu S de sterke limiet van het net $(N_\alpha)_\alpha$ met N_α allen normaal. Bekijk voor elke α de spectrale ontbinding $N_\alpha = \int_{\mathbb{C}} z\, dE_\alpha(z)$ en de verzameling $\Delta = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < \|S\| + 1\}$, dan volgt uit lemma 9.8 dat $E_\alpha(\Delta) \to \mathbb{1}$ in de sterke operatortopologie. Zij nu $M_\alpha = E_\alpha(\Delta) N_\alpha$ voor elke α. Dan is elke M_α normaal (want $E_\alpha(\Delta)$ commuteert met N_α). Uit lemma 9.2 volgt dat ook $(M_\alpha)_\alpha$ sterk convergeert naar S. Voor elke α is ook $M_\alpha = \int_\Delta z\, dE_\alpha(z)$, zodat $\|M_\alpha\| < \|S\| + 1$. Weer uit lemma 9.2 halen we dan dat voor elke $j \in \mathbb{N}$: $(M_\alpha^j)_\alpha$ convergeert naar S^j. Dus

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\sum_{i=0}^{n} M_\alpha^{*i} \xi_i\|^2 \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \langle M_\alpha^{*j} \xi_j, M_\alpha^{*i} \xi_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \langle M_\alpha^{i} \xi_j, M_\alpha^{j} \xi_i \rangle \\ &\to \sum_{i,j=0}^{n} \langle S^{i} \xi_j, S^{j} \xi_i \rangle, \end{aligned}$$

  voor elke eindige deelverzameling $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathfrak{H}$, met $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Uit het Halmos-Bram criterium 4.2 leren we dan dat S subnormaal is.

∎

§ 10 Ongelijkheden

Deze sectie behandelt ongelijkheden die op het eerste gezicht wat raar lijken. De norm en het spoor van de zelfcommutator van een hyponormale operator worden vergeleken met de Lebesguemaat (die we in deze sectie noteren met μ) van het spectrum van de operator zelf. De Putnam-ongelijkheid volgt uit die van Berger en Shaw, maar in het subnormale geval kan daar een apart bewijs van gegeven worden, dat eenvoudiger (en directer) is. We beginnen dus ook daarmee. We volgen de aanpak van [25].

10.1 Lemma (Ahlfors-Beurling)

Zij $\Delta \subset \mathbb{C}$ compact, dan geldt voor elke $z \in \mathbb{C}$:

$$\left| \int_\Delta \frac{1}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) \right| \leqslant (\pi \mu(\Delta))^{1/2}.$$

Bewijs :
Door een coördinaatverandering mogen we veronderstellen dat $z = 0$ en

$$I = \int_\Delta \frac{1}{\zeta} \, d\mu(\zeta) \geqslant 0.$$

Overgaan naar polaire coördinaten levert:

$$\begin{aligned} I &= \int_\Delta (\cos(\theta) - i \sin(\theta)) \, dr \, d\theta \\ &= \int_\Delta \cos(\theta) \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

Schrijf nu $\Delta_+ = \{\zeta \in \Delta | \ \Re e(\zeta) \geqslant 0\}$, dan krijgen we

$$I \leqslant \int_{\Delta_+} \cos(\theta) \, dr \, d\theta.$$

Zij nu $R = \sup\{|\zeta|; \ \zeta \in \Delta\}$, en voor $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\Delta_+(\theta) = \Delta_+ \cap \{re^{i\theta} | \ 0 \leqslant r \leqslant R\}.$$

Noteer de lineaire Lebesguemaat van de verzameling $\Delta_+(\theta)$ met $\ell(\theta)$. Door de Cauchy-Schwarz ongelijkheid vinden we dan

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_+} \cos(\theta)\,dr\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ell(\theta)\cos(\theta)d\theta \\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ell(\theta)^2\,d\theta\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Noteer nu met $\ell(t,\theta)$ de lineaire Lebesguemaat van de verzameling

$$\Delta_+ \cap \{re^{i\theta}|\ 0 \leqslant r \leqslant t\},$$

dan is $\ell(.,\theta)$ een stijgende functie waarvoor $\ell(t_1,\theta) - \ell(t_2,\theta) \leqslant t_1 - t_2$, als $t_2 \leqslant t_2$. Er geldt dus

$$\begin{aligned}\frac{\ell(\theta)^2}{2} &= \int_{\Delta_+(\theta)} \ell(t,\theta)\,d\ell(t,\theta) \\ &\leqslant \int_{\Delta_+(\theta)} \ell(t,\theta)\,dt \\ &\leqslant \int_{\Delta_+(\theta)} t\,dt.\end{aligned}$$

We kunnen nu de stukjes van de puzzel ineenpassen:

$$\begin{aligned}I &\leqslant \int_{\Delta_+} \cos(\theta)\,dr\,d\theta \\ &\leqslant \left(\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell(\theta)^2}{2}\,d\theta\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\Delta_+(\theta)} t\,dt\,d\theta\right)^{1/2} \\ &= (\pi\mu(\Delta_+))^{1/2} \\ &\leqslant (\pi\mu(\Delta))^{1/2}\end{aligned}$$

∎

In wat volgt wordt $\mathbb{C}$ met $\mathbb{R}^2$ geïdentificeerd. Koppels (u,v) van $\mathbb{R}^2$ worden dan ook soms genoteerd met $u + iv$.

10.2 Lemma

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ een C^∞-functie. Zij $\Delta \subset \Gamma \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$ compacte verzamelingen, zodat er een $r \in \mathbb{R}_0^+$ bestaat waarvoor $d(\Delta, \lambda \setminus \Gamma) \geqslant r$. Dan is voor elke $z \in \Delta$:

$$\iint_{\Lambda \setminus \Gamma} \frac{f(u,v)}{(u+iv)-z}\, du\, dv \quad \in \quad R(\Delta).$$

BEWIJS :

Kies $\epsilon > 0$ willekeurig. We veronderstellen $f\chi_{\Lambda\setminus\Gamma} \neq 0$ (anders is de bewering triviaal). Omdat f continu is, bestaat er een $\delta_0 \in \mathbb{R}_0^+$ zodat $|f(u,v) - f(u',v')| < \frac{\epsilon r}{2\mu(\Lambda\setminus\Gamma)}$ als $\|(u,v) - (u',v')\| < \delta_0$. Zij $R = \sup_{u+iv\in\Lambda\setminus\Gamma} |f(u,v)|$. Noem nu $\delta = \min(\frac{\delta_0}{\sqrt{2}}, \frac{\epsilon r^2}{2\sqrt{2}R\mu(\Lambda\setminus\Gamma)})$. We kunnen nu $\lambda \setminus \Gamma$ overdekken met een eindig aantal 2 aan 2 disjuncte vierkantjes $V_1, \ldots, V_k$ die allen zijde δ hebben. Noem voor elke j: $W_j = V_j \cap (\Lambda \setminus \Gamma)$. Kies nu in elke W_j een element $u_j + iv_j$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{\Lambda\setminus\Gamma} \frac{f(u,v)}{(u+iv)-z}\, du\, dv - \sum_j \frac{f(u_j,v_j)}{(u_j+iv_j)-z}\, \mu(W_j) \right| \\
&= \left| \iint_{\Lambda\setminus\Gamma} \left(\frac{f(u,v)}{(u+iv)-z} - \sum_j \frac{f(u_j,v_j)}{(u_j+iv_j)-z} \chi_{W_j} \right) du\, dv \right|
\end{aligned}$$

Nu geldt voor elke j en elke $u + iv \in W_j$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(u,v)}{(u+iv)-z} - \frac{f(u_j,v_j)}{(u_j+iv_j)-z} \right| \\
\leqslant\ & \left| \frac{f(u,v)}{(u_j+iv_j)-z} - \frac{f(u_j,v_j)}{(u_j+iv_j)-z} \right| + \left| \frac{f(u,v)}{(u+iv)-z} - \frac{f(u,v)}{(u_j+iv_j)-z} \right| \\
<\ & \frac{\epsilon r}{r 2\mu(\Lambda\setminus\Gamma)} + \frac{\sqrt{2}\epsilon r^2}{2\sqrt{2}R\mu(\Lambda\setminus\Gamma)} \frac{|f(u,v)|}{r^2} \\
\leqslant\ & \frac{\epsilon}{\mu(\Lambda\setminus\Gamma)},
\end{aligned}$$

zodat de integraal kleiner wordt dan ϵ. Omdat duidelijk $\sum_j \frac{f(u_j,v_j)}{(u_j+iv_j)-z}\, \mu(W_j)$ een rationale functie met polen buiten Δ is, geldt het gestelde. ∎

Zij Δ een compacte verzameling. We bekijken op $C(\Delta)$ de supnorm, en de afstandsfunctie die daarbij hoort ($d(f,g) = \|f - g\|_\infty$).

10.3 Stelling (Alexander) [3]

Zij $\Delta \subset \mathbb{C}$ *compact, dan*

$$d(\bar{z}, R(\Delta)) \;\leqslant\; \left(\frac{\mu(\Delta)}{\pi}\right)^{1/2}$$

BEWIJS :
Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_n = \{\lambda \in \Lambda |\; d(\lambda, \Delta) \leqslant 1/n\}.$$

Zij $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ een C^∞-functie met compacte drager Λ zodat $\psi(u, v) = (u, -v)$ op een omgeving van Δ_1. ψ is dus gewoon de complexe toevoeging (op die omgeving van Δ). We maken in wat volgt misbruik van notatie; we beschouwen ψ ook als functie van de complexe variabele $\zeta = u + iv$. Met $\bar{\partial}\psi$ wordt $\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{1}{2i}\frac{\partial \psi}{\partial v}$ bedoeld. Er geldt:

$$\psi(z) \;=\; -\frac{1}{\pi}\iint_\Lambda \frac{\bar{\partial}\psi}{\zeta - z}\, du\, dv.$$

Dit wordt bewezen in appendix B. Omdat op Δ_1: $\bar{\partial}\psi = 1$, geldt voor alle $z \in \Delta$ en elke $n \in \mathbb{N}$:

$$\bar{z} \;=\; -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_n} \frac{1}{\zeta - z}\, du\, dv - \frac{1}{\pi}\iint_{\Lambda\setminus\Delta_n} \frac{\bar{\partial}\psi}{\zeta - z}\, du\, dv.$$

Door vorig lemma is de tweede integraal een $R(\Delta)$-functie. Dus voor elke n geldt

$$\begin{aligned} d(\bar{z}, R(\Delta)) &\leqslant \sup_{z\in\Delta}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_n} \frac{1}{\zeta - z}\, du\, dv\right) \\ &\leqslant \left(\frac{\mu(\Delta_n)}{\pi}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wegens het lemma van Ahlfors-Beurling.

Omdat nu $\Delta_n \searrow \Delta$ en μ σ-additief is, geldt $\mu(\Delta_n) \searrow \mu(\Delta)$, zodat

$$\begin{aligned} d(\bar{z}, R(\Delta)) &\leqslant \inf_n \left(\frac{\mu(\Delta_n)}{\pi}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\mu(\Delta)}{\pi}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

∎

10.4 Stelling (Putnam)

Zij $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een subnormale operator met zelfcommutator D, dan geldt

$$\|D\| \;\leqslant\; \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(S)).$$

BEWIJS :
Zij $N \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ de minimale normale uitbreiding van S. Noem P de projectie van $\mathfrak{K}$ op $\mathfrak{H}$. Kies een willekeurige eenheidsvector $\xi \in \mathfrak{H}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\langle D\xi, \xi\rangle &= \|S\xi\|^2 - \|S^*\xi\|^2 \\
&= \|N\xi\|^2 - \|PN^*\xi\|^2 \\
&= \|N^*\xi\|^2 - \|PN^*\xi\|^2 \\
&= d(N^*\xi, \mathfrak{H})^2 \\
&= \inf\{\|N^*\xi - \eta\|^2;\ \eta \in \mathfrak{H}\} \\
&\leqslant \inf\{\|N^*\xi - f(N)\xi\|^2;\ f \in R(\sigma(S))\} \\
&\leqslant \inf\{\|N^* - f(N)\|^2;\ f \in R(\sigma(S))\} \\
&= d(\bar{z}, R(\sigma(S)))^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(S)),
\end{aligned}$$

waarbij we de isometrie-eigenschap van de functiecalculus voor normale operatoren gebruikten, en de stelling van Alexander. Omdat ξ willekeurig was, is de stelling bewezen (want D is positief). ∎

10.5 Gevolg

Een subnormale operator waarvan het spectrum Lebesguemaat 0 heeft is noodzakelijk normaal.

We gaan nu de stelling van Berger en Shaw bewijzen. We volgen [20]. Daarin wordt een meer uitgebreid resultaat bewezen. Hier wordt echter enkel het relevante geval behandeld.

10.6 Definitie

Zij A een operator op $\mathfrak{H}$, en zij $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale basis voor $\mathfrak{H}$.

- Het spoor van A, $Tr(A)$, is $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle A\xi_n, \xi_n\rangle$.

- De Hilbert-Schmidt norm van A, $\|A\|_2$, is $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A\xi_n\|)^{1/2}$.

▲

Er geldt dat $Tr(AB) = Tr(BA)$ voor alle operatoren A en B. Als je de operatoren voorstelt als oneindige matrices, is dit eenvoudig in te zien. Het spoor is dan niets anders dan de som van de diagonaalelementen, en het enige wat verandert als je de vermenigvuldiging in de andere volgorde neemt, is de volgorde der termen. Hieruit volgt ook dat het spoor invariant is voor basisveranderingen. Immers, Zij U een transformatie van basis, dan wordt A t.o.v. de nieuwe basis U^*AU, en $Tr(U^*AU) = Tr(U^*UA) = Tr(A)$. Deze onafhankelijkheid van keuze van basis geldt natuurlijk ook voor de Hilbert-Schmidt norm; de Hilbert-Schmidt norm van een operator A is immers niets anders dan de wortel van het spoor van A^*A.

10.7 Lemma

Zij A een operator en P een eindige rang projectie (d.w.z. het bereik van P heeft een eindige dimensie), dan is

$$Tr(P[A^*, A]P) \quad \leqslant \quad \|(\mathbb{1} - P)AP\|_2^2$$

Bewijs :

Schrijf P als 2×2 operatormatrix $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en zij $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ de overeenkomstige decompositie van A. Dan is $P[A^*, A]P = \begin{pmatrix} [B^*, B] + D^*D - CC^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, zodat $Tr(P[A^*, A]P) = Tr[B^*, B] + \|D\|_2^2 - \|C\|_2^2$. Omdat $Tr(B^*B) = Tr(BB^*) < \infty$ (want B werkt immers slechts op een eindigdimensionale ruimte), is $Tr([B^*, B]) = 0$, dus $Tr(P[A^*, A]P) \leqslant \|C\|_2^2 = \|(\mathbb{1} - P)AP\|_2^2$. ∎

We hebben een uitbreiding nodig van het begrip cycliciteit:

10.8 Definitie

Zij $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. We noemen een operator $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ m-cyclisch als er m vectoren $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ bestaan zodat

$$\mathfrak{H} \quad = \quad \bigvee\{A^k\xi_j |\ k \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2, \ldots, m\}\}.$$

Analoog is A rationaal m-cyclisch als er m vectoren $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ bestaan zodat

$$\mathfrak{H} \;=\; \bigvee\{f(A)\xi_j |\; f \in Rat(\sigma(A)), j \in \{1, 2, \ldots, m\}\}.$$

▲

OPMERKING:
Als we m definiëren door 'een operator is (rationaal) m-cyclisch', bedoelen we de kleinste m waarvoor dit geldt. Het is echter duidelijk dat elke m-cyclische operator ook n-cyclisch is als $n > m$. Als m al bestaat, wil de bewering 'een operator is (rationaal) m-cyclisch' dus niet noodzakelijk zeggen dat m het kleinste getal is waarvoor dit geldt.

10.9 Lemma

Als twee operatoren A, B disjuncte spectra hebben, A rationaal m-cyclisch is en B rationaal n-cyclisch. Zij $k = \max(m, n)$, dan is $A \oplus B$ rationaal k-cyclisch.

BEWIJS :
We merken eerst op dat $\sigma(A \oplus B) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Immers, de inverse van $A \oplus B$, als die bestaat, is $A^{-1} \oplus B^{-1}$. Dus $A \oplus B - \lambda \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$ is niet inverteerbaar asa $A - \lambda \mathbb{1}$ of $B - \lambda \mathbb{1}$ is niet inverteerbaar.

Het bewijs is nu eenvoudig: immers als de spectra disjunct zijn, zijn $\mathbb{1} \oplus 0$ en $0 \oplus \mathbb{1}$ uniforme limieten van rationale functies in de operator $A \oplus B$. Neem dan k vectoren in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ zodat elke vector in de genererende verzamelingen van A en B voorkomt in de decompositie. ∎

10.10 Lemma

Zij A een rationaal m-cyclische operator, dan bestaat er een rij eindige rang projecties $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die stijgt naar $\mathbb{1}$ en zodat de rang van $(\mathbb{1} - P_k)AP_k$ kleiner is dan m voor alle $k \in \mathbb{N}$.

BEWIJS :
Zij $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ een rationaal voortbrengende set vectoren voor A en zij $\{z_1, z_2, \ldots\}$ een dichte deelverzameling van $\sigma(A)^c$. Definieer voor elk natuurlijk getal k de projectie P_k op $\mathfrak{H}_k := \bigvee\{A^j(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_k\mathbb{1})^{-1}\xi_i |\; 0 \leqslant j \leqslant 2k \text{ en } 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Omdat door A maximum m van deze voortbrengers buiten deze ruimte afgebeeld worden (enkel als $j = 2k$), is de rang van $(\mathbb{1} - P_k)AP_k \leqslant m$.

Als $k < l$, is $\mathfrak{H}_k \subset \mathfrak{H}_l$: immers

$$A^j(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_k\mathbb{1})^{-1}\xi_i =$$
$$(A - z_{k+1}\mathbb{1}) \cdots (A - z_l\mathbb{1})A^j(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_l\mathbb{1})^{-1}\xi_i,$$

dus $(P_k)_k$ is een stijgende rij. We beweren nu dat een willekeurige rationale functie in A willekeurig dicht benaderd kan worden door eindige lineaire combinaties van de vorm $A^j(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_k\mathbb{1})^{-1}$ met $j \leqslant 2k$. Hieruit volgt dan dat $(P_k)_k$ stijgt naar $\mathbb{1}$. ∎

10.11 De claim

Er wordt geen exact bewijs gegeven van de claim. Wel wordt duidelijk gemaakt hoe een rationale functie benaderd kan worden door functies van de voorgeschreven vorm.

- *De identieke functie A*

  $A = A^2(A - z_1\mathbb{1})^{-1} - z_1A(A - z_1\mathbb{1})^{-1}$

- *Monomen A^n*

  Op dezelfde manier als hierboven worden voldoende factoren in de noemer toegelaten (evenveel als de (oorspronkelijke) macht in de teller is voldoende) en gaat men $A^{2n}(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_n\mathbb{1})^{-1}$ corrigeren tot men

  $$(A - z_1\mathbb{1}) \cdots (A - z_n\mathbb{1})A^n(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_n\mathbb{1})^{-1}$$

  bekomt.

- *Polynomen*

  Polynomen zijn natuurlijk gewoon lineaire combinaties van monomen.

- $(A - z\mathbb{1})^{-1}$ *voor een zekere $z \in \sigma(A)^c$*

  Kies een $z_j \in \{z_1, z_2, \ldots\}$ die dicht bij z ligt. Dan kan je $(A - z\mathbb{1})^{-1}$ benaderen door $(A - z_1\mathbb{1}) \cdots (A - z_{j-1}\mathbb{1})(A - z_1\mathbb{1})^{-1} \cdots (A - z_j\mathbb{1})^{-1}$.

- $(A - z\mathbb{1})^{-n}$ *voor een zekere $z \in \sigma(A)^c$*

  Als je uit een dichte verzameling $\mathfrak{D}$ een eindig aantal punten wegneemt (noem de bekomen verzameling $\tilde{\mathfrak{D}}$), blijft ze dicht. Neem immers een willekeurige niet-lege open verzameling Γ, en neem daar ook die punten uit weg (als ze erin liggen). De nieuwe verzameling $\tilde{\Gamma}$ is nog steeds niet-leeg en open, en heeft dus niet-lege doorsnede met $\mathfrak{D}$. Dus ook $\tilde{\mathfrak{D}} \cap \tilde{\Gamma} = \mathfrak{D} \cap \tilde{\Gamma}$ is niet leeg.

Je kan dus n punten $\{z_{j_1}, \ldots, z_{j_n}\}$ uit $\{z_1, z_2, \ldots\}$ nemen die willekeurig dicht bij z liggen. Stel dat j de grootste index is van deze punten, dan kan je

$$\begin{aligned} &\left(\prod\nolimits_{k\in\{1,\ldots,j\}\setminus\{j_1,\ldots,j_n\}}(A - z_k\mathbb{1})\right)(A - z_1\mathbb{1})^{-1}\cdots(A - z_j\mathbb{1})^{-1} \\ &\quad = (A - z_{j_1}\mathbb{1})^{-1}\cdots(A - z_{j_n}\mathbb{1})^{-1} \end{aligned}$$

nemen als benadering voor $(A - z\mathbb{1})^{-k}$.

- $(A - y_1\mathbb{1})^{-n_1}\cdots(A - y_k\mathbb{1})^{-n_k}$ *met de* y_i *onderling verschillend in* $\sigma(A)^c$

  Vermits de polynomen

$$\begin{gathered} (A - y_2\mathbb{1})^{n_2}(A - y_3\mathbb{1})^{n_3}\cdots(A - y_k\mathbb{1})^{n_k} \\ (A - y_1\mathbb{1})^{n_1}(A - y_3\mathbb{1})^{n_3}\cdots(A - y_k\mathbb{1})^{n_k} \\ \vdots \\ (A - y_1\mathbb{1})^{n_1}(A - y_2\mathbb{1})^{n_2}\cdots(A - y_{k-1}\mathbb{1})^{n_{k-1}} \end{gathered}$$

  onderling ondeelbaar zijn, bestaat er een lineaire combinatie van deze termen (met als coëfficiënten polynomen) die gelijk is aan $\mathbb{1}$. Als we deze relatie delen door $(A - y_1\mathbb{1})^{n_1}(A - y_2\mathbb{1})^{n_2}\cdots(A - y_k\mathbb{1})^{n_k}$ vinden we een lineaire combinatie van dingen die we al kunnen benaderen.

- *Een willekeurige rationale functie* $f(A)$

  Je kan de noemer ontbinden tot een product met lineaire factoren ($\mathbb{C}$ is algebraïsch gesloten). Dan krijgen we het product van twee dingen die we al kunnen benaderen.

10.12 Lemma

Zij A een rationaal m-cyclische operator met zelfcommutator D, dan is $Tr(D) \leqslant m\|A\|^2$.

Bewijs :
Door lemma 10.10 vinden we een rij projecties $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die naar $\mathbb{1}$ stijgt en zodat voor elke k de rang van $(\mathbb{1} - P_k)AP_k \leqslant m$. Hieruit volgt dat (voor elke k)

$$\|(\mathbb{1} - P_k)AP_k\|_2^2 \leqslant m\|(\mathbb{1} - P_k)AP_k\|^2.$$

Door lemma 10.7 vinden we dus

$$\begin{aligned} Tr(D) &= \lim_k Tr(P_k D P_k) \\ &\leqslant \limsup_k \|(\mathbb{1} - P_k) A P_k\|_2^2 \\ &\leqslant \limsup_k m\|(\mathbb{1} - P_k) A P_k\|^2 \\ &\leqslant m\|A\|^2. \end{aligned}$$

∎

10.13 Stelling (Berger-Shaw)

Zij $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een rationaal m-cyclische hyponormale operator met zelfcommutator D, dan is $Tr(D) \leqslant \frac{m}{\pi}\mu(\sigma(T))$.

Bewijs :
We splitsen het bewijs op in twee gevallen:

- $m < \infty$

  Zij $R = \|T\|$ en zij $D = \overline{B(0, R)}$. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig. We kunnen een eindige verzameling $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ vinden van 2 aan 2 disjuncte gesloten bollen in $D \setminus \sigma(T)$, zodat $\mu(D) < \mu(\sigma(T)) + \sum_k \mu(D_k) + \epsilon$. (dit volgt uit de overdekkingsstelling van Vitali[7]) Zij voor elke D_k: a_k het centrum en r_k de straal. We kunnen dan vorige bewering herschrijven als $\pi R^2 - \pi \sum_k r_k^2 < \mu(\sigma(T)) + \epsilon$. Zij nu U_+ de eenzijdige shift (op $\ell^2(\mathbb{N})$), en zij voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: U_k de directe som van m kopies van $a_k \mathbb{1} + r_k U_+$. Dan is voor elke k: $\sigma(U_k) = D_k$ (dit volgt uit voorbeeld 5.10). Het is duidelijk dat elke U_k m-cyclisch is (want U_k is 1-cyclisch). Dus zeker is elke U_k rationaal m-cyclisch. Omdat de spectra van $T, U_1, \ldots, U_k$ paarsgewijze disjunct zijn, is ook $V := T \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ rationaal m-cyclisch (lemma 10.9). Ook geldt eenvoudig $\|V\| = R$, want R is het maximum van de normen van de sommanden van V. Omdat voor elke k: $[U_k^*, U_k]$ een projectie is, is $[V^*, V]$ een positieve operator.

[7]Stelling (Vitali) [33]
Zij $\mathcal{E}$ een familie van gesloten verzamelingen in $\mathbb{C}$ die een verzameling $\Delta \subset \mathbb{C}$ bedekt, zodat voor elke $x \in \Delta$ en $\delta > 0$ een $E \in \mathcal{E}$ bestaat zodat $x \in E$ en $\mu(E) < \delta$, dan bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een eindige deelverzameling $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{E}$ met de E_i twee aan twee disjunct en zodat $\mu(\Delta) < \sum_i \mu(E_i) + \epsilon$.

Door lemma 10.12 weten we dus dat $Tr([V^*, V]) \leqslant m\|V\|^2 = mR^2$. Ook is

$$\begin{aligned} Tr([V^*, V]) &= Tr(D) + \sum_k Tr([U_k^*, U_k]) \\ &= Tr(D) + m \sum_k r_k^2. \end{aligned}$$

We vinden dus

$$\begin{aligned} \pi Tr(D) &\leqslant m\pi R^2 - m \sum_k \pi r_k^2 \\ &< m\mu(\sigma(T) + \epsilon). \end{aligned}$$

Omdat ϵ willekeurig is, is het bewijs volledig.

- $m = \infty$ & $\mu(\sigma(T)) = 0$

  Zij $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ een basis voor $\mathfrak{H}$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$, zij P_n de projectie op de rationaal invariante deelruimte voor T voortgebracht door $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (dit is dus de kleinste deelruimte van $\mathfrak{H}$ die deze verzameling omvat en invariant is voor elke rationale functie in T (met polen buiten $\sigma(T)$); deze ruimte is dus rationaal n-cyclisch). Voor een vaste n, schrijf $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en overeenkomstig $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (die nul natuurlijk omdat het bereik van P_n invariant is onder T). Dan is $P_n D P_n = \begin{pmatrix} [A^*, A] - BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus (omdat D positief is, en P_n zelftoegevoegd) is $[A^*, A] - BB^*$ positief. Omdat de ruimte waarop A werkt rationaal invariant is voor T, is $\sigma(A) \subseteq \sigma(T)$.

  Inderdaad, zij $\lambda \notin \sigma(T)$, dan is

$$\begin{aligned} (T - \lambda\mathbb{1})^{-1}(T - \lambda\mathbb{1}) &= \begin{pmatrix} A_1(A - \lambda\mathbb{1}) & \bigstar \\ 0 & \bigstar \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  waarbij A_1 de noordwestcomponent van $(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ is. $A - \lambda\mathbb{1}$ is dus al zeker linksinverteerbaar, en analoog is $A - \lambda\mathbb{1}$ ook rechtsinverteerbaar, met dezelfde inverse. Dus $\lambda \notin \sigma(A)$.

Dus A is rationaal n-cyclisch en $\mu(\sigma(A)) \leqslant \mu(\sigma(T)) = 0$. Door op A het eerste geval toe te passen, vinden we dat $Tr([A^*, A]) \leqslant 0$. We bekomen dus $Tr(P_n D P_n) \leqslant 0$ voor elke n. Omdat P_n stijgt naar $\mathbb{1}$, vinden we $Tr(D) \leqslant 0$.

∎

Uit deze stelling kunnen we de ongelijkheid van Putnam afleiden voor hyponormale operatoren.

10.14 Stelling (Putnam)

Zij $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ een hyponormale operator met zelfcommutator D, dan geldt

$$\|D\| \leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T)).$$

BEWIJS :
Zij $\xi \in \mathfrak{H}$ een eenheidsvector. Het is voldoende te bewijzen dat

$$\langle D\xi, \xi\rangle \leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T)).$$

Zij $\mathfrak{H}_\xi$ de rationaal cyclische deelruimte van $\mathfrak{H}$ voortgebracht door ξ, d.w.z.

$$\mathfrak{H}_\xi = \bigvee\{f(T)\xi |\ f \in Rat(\sigma(T))\}.$$

Omdat deze deelruimte natuurlijk invariant is voor T is $R = T|_{\mathfrak{H}_\xi}$ nog steeds hyponormaal. R is heeft per constructie een rationaal cyclische vector (ξ). Ook zal $\|R^*\xi\| = \|PT^*\xi\| \leqslant \|T^*\xi\|$, met P de projectie op $\mathfrak{H}_\xi$. Zoals in het bewijs van het tweede geval in de stelling van Berger en Shaw is $\sigma(R) \subseteq \sigma(T)$. Dus is

$$\begin{aligned}
\langle D\xi, \xi\rangle &= \|T\xi\|^2 - \|T^*\xi\|^2 \\
&\leqslant \|R\xi\|^2 - \|R^*\xi\|^2 \\
&= \langle [R^*, R]\xi, \xi\rangle \\
&\leqslant Tr([R^*, R]) \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(R)) \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T))
\end{aligned}$$

∎

Voor hyponormale operatoren geldt dus ook:

10.15 Gevolg

Een hyponormale operator T met $\mu(\sigma(T)) = 0$ is noodzakelijk normaal.

Op $\mathbb{C}$ bestaan er veel maten, en men kan zich dan ook de vraag stellen of deze stellingen ook gelden met een andere maat dan μ. Het is eenvoudig in te zien dat elk scalair veelvoud $t\mu$ met $t > 1$ van de Lebesguemaat ook voldoet. Dit zullen echter de enige Borelmaten zijn met die eigenschap.

In het bewijs van de Berger-Shaw-ongelijkheid maakt men expliciet gebruik van het feit dat de Lebesguemaat van een verzameling overeenkomt met de oppervlakte van de verzameling. Hieruit kunnen we niet echt besluiten dat dit de enige maat is met die eigenschap, maar we kunnen wel besluiten dat de maat die deze eigenschap heeft translatie-invariant moet zijn. Uit het bewijs van de Putnam-ongelijkheid in het subnormale geval zien we ook dat de maat translatie-invariant moet zijn.

Haar heeft bewezen dat er slechts één translatie-invariante borelmaat (op scalair veelvoud na) bestaat op een willekeurige (commutatieve) maatruimte (zie hiervoor [29]). Omdat we in het bewijs van het lemma van Ahlfors en Beurling gebruik maakten van de eigenschap dat de functie $\ell(.,\theta)$ voldeed aan $\ell(t_1,\theta) - \ell(t_2,\theta) \leqslant t_1 - t_2$, als $t_2 \leqslant t_2$, kunnen we geen willekeurig scalair veelvoud nemen van μ, maar slechts veelvouden $t\mu$ met $t \geqslant 1$. Als dit niet het geval was, zou immers elke subnormale operator normaal zijn, vermits we het rechterlid van de Putnam-ongelijkheid dan willekeurig klein kunnen krijgen.

Appendix A: Wortels van positieve operatoren

We beginnen met twee lemma's:

1. Lemma

Zij A en B operatoren zodat $0 \leqslant A \leqslant B$ en zij A inverteerbaar, dan is B inverteerbaar, en $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

Bewijs :

$$\begin{aligned} B - A \geqslant 0 &\Rightarrow A^{-1/2}(B-A)A^{-1/2} \geqslant 0 \\ &\Rightarrow A^{-1/2}BA^{-1/2} \geqslant \mathbb{1} \\ &\Rightarrow \sigma(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subseteq [1, +\infty) \\ &\Rightarrow A^{-1/2}BA^{-1/2} \text{ is inverteerbaar} \\ &\Rightarrow B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} \text{ is inverteerbaar} \end{aligned}$$

a) $A = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \leqslant B &\Rightarrow \sigma(B) \subseteq [1, \|B\|] \\ &\Rightarrow \sigma(B^{-1}) \subseteq [1/\|B\|, 1] \\ &\Rightarrow \sigma(\mathbb{1} - B^{-1}) \subseteq [0, 1 - \frac{1}{\|B\|}\ ] \subseteq \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \mathbb{1} \geqslant B^{-1} \end{aligned}$$

b) A willekeurig

$$\begin{aligned} A \leqslant B &\Rightarrow \mathbb{1} \leqslant A^{-1/2}BA^{-1/2} \\ &\Rightarrow A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} = (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1} \leqslant \mathbb{1} \\ &\Rightarrow B^{-1} \leqslant A^{-1} \end{aligned}$$

∎

2. Lemma

Zij $\lambda > 0$ en $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $0 \leqslant A \leqslant B$, dan is $A(\mathbb{1} + \lambda A)^{-1} \leqslant B(\mathbb{1} + \lambda B)^{-1}$.

Bewijs :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant A \leqslant B \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{1} \leqslant (\mathbb{1} + \lambda A) \leqslant (\mathbb{1} + \lambda B) \\
&\Rightarrow \quad (\mathbb{1} + \lambda B)^{-1} \leqslant (\mathbb{1} + \lambda A)^{-1} \leqslant \mathbb{1} \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{1} - (\mathbb{1} + \lambda A)^{-1} \leqslant \mathbb{1} - (\mathbb{1} + \lambda B)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad ((\mathbb{1} + \lambda A) - \mathbb{1})(\mathbb{1} + \lambda A)^{-1} \leqslant ((\mathbb{1} + \lambda B) - \mathbb{1})(\mathbb{1} + \lambda B)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad \lambda A(\mathbb{1} + \lambda A)^{-1} \leqslant \lambda B(\mathbb{1} + \lambda B)^{-1}
\end{aligned}$$

∎

Nu hebben we voldoende materiaal om volgende stelling te bewijzen:

3. Stelling

Zij $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zodat $0 \leqslant A \leqslant B$, dan is ook $0 \leqslant A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$.

Bewijs :
Definieer voor elke $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de functie $f_\lambda : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \ t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+\lambda t}$. We beschouwen dit nu als functie van λ en we berekenen

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(t) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\lambda}(1+\lambda t)}\, d\lambda.$$

Door substitutie $\mu = \lambda t$ krijgen we:

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\mu}(1+\mu)}\, d\mu = \pi\sqrt{t},$$

want door substitutie $x = \sqrt{\mu}$ vinden we:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\mu)}\, d\mu \ = \ 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \ = \ 2Bgtg(x)\big|_0^{+\infty} \ = \ \pi.$$

Zij nu C een willekeurige positieve operator, en zij $\int_{\mathbb{R}^+} t\, dE(t)$ zijn spectrale ontbinding. Definieer voor elke $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de operator $C_\lambda = f_\lambda(C)$. We bekijken nu de afbeelding

$$\rho : \ \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C} : \ (\xi, \eta) \mapsto \int_0^{+\infty} \langle C_\lambda \xi, \eta \rangle \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda.$$

Dit is duidelijk een sesquilineaire vorm op $\mathfrak{H}$. We rekenen nu uit dat deze ook begrensd is:

$$\begin{aligned}
\rho(\xi,\eta) &= \int_0^{+\infty} \langle C_\lambda \xi, \eta\rangle \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{t}{1+\lambda t}\, d\langle E(t)\xi,\eta\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\lambda}(1+\lambda t)}\, d\lambda \right) d\langle E(t)\xi,\eta\rangle \\
&= \pi \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{t}\, d\langle E(t)\xi,\eta\rangle \\
&= \pi \langle C^{1/2}\xi,\eta\rangle.
\end{aligned}$$

Het omwisselen van integratievolgorde mag omdat de voorwaarden van de stelling van Fubini[8] voldaan zijn.

Nu is $A \leqslant B$, dus voor elke λ is $f_\lambda(A) \leqslant f_\lambda(B)$, zodat voor alle $\xi \in \mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}
\langle f_\lambda(A)\xi,\xi\rangle \leqslant \langle f_\lambda(B)\xi,\xi\rangle &\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \langle f_\lambda(A)\xi,\xi\rangle\, d\lambda \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \langle f_\lambda(B)\xi,\xi\rangle\, d\lambda \\
&\Rightarrow \pi\langle A^{1/2}\xi,\xi\rangle \leqslant \pi\langle B^{1/2}\xi,\xi\rangle.
\end{aligned}$$

∎

[8] Stelling (Fubini)[29]
Zij $(\Omega_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ en $(\Omega_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ σ-eindige maatruimten en zij $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,+\infty]$ een positieve $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$-meetbare functie, dan geldt

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \quad = \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

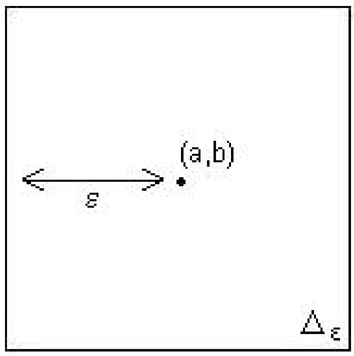
Appendix B:

Een veralgemeende Cauchy-integraalformule

We hebben dus een complexe functie ψ (met compacte drager Λ) die als $\mathbb{R}^2$-functie differentieerbaar is. We gebruiken de dubbele notatie $\psi(u,v)$ en $\psi(\zeta)$ met $\zeta = u+iv$. Zij nu

$$I(z) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{\partial}\psi}{\zeta - z}\, du\, dv,$$

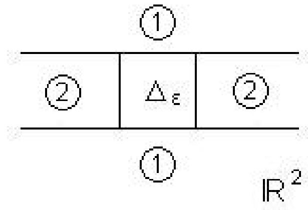
dan moeten we bewijzen dat $I(z) = \psi(z)$ voor iedere z in $\mathbb{C}$. Voor een vaste (maar willekeurige) $z = a+ib$, en voor iedere ϵ definiëren we $\Delta_\epsilon = [a-\epsilon, a+\epsilon]\times[b-\epsilon, b+\epsilon]$ en $I_\epsilon(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{\bar{\partial}\psi}{\zeta - z}\, du\, dv$.



Duidelijk is $\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(z) = I(z)$ (immers, het integratiegebied wordt willekeurig klein, en $\frac{1}{|z|}$ is μ-integreerbaar op compacten). We rekenen nu $I_\epsilon(z)$ wat verder uit.

$$\begin{aligned} I_\epsilon(z) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{\bar{\partial}\psi}{\zeta - z}\, du\, dv \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{1}{2i}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{1}{(u-a)+i(v-b)}\, du\, dv \end{aligned}$$

We kunnen de integralen opsplitsen over verschillende deelgebieden. We behandelen eerst de eerste term.



$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{1}{2}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{1}{(u-a)+i(v-b)}\,du\,dv \\
= & -\frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|>\epsilon} dv \int_{\mathbb{R}} du\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{1}{(u-a)+i(v-b)} \\
& \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|\leqslant\epsilon} dv \int_{|u-a|>\epsilon} du\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{1}{(u-a)+i(v-b)} \\
= & -\frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|>\epsilon} dv \left(\left.\frac{\psi(u,v)}{(u-a)+i(v-b)}\right|_{u=-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} du\,\frac{\psi(u,v)}{((u-a)+i(v-b))^2} \right) \\
& \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|\leqslant\epsilon} dv \left(\left.\frac{\psi(u,v)}{(u-a)+i(v-b)}\right|_{u=-\infty}^{a-\epsilon} + \left.\frac{\psi(u,v)}{(u-a)+i(v-b)}\right|_{u=a+\epsilon}^{+\infty} \right. \\
& \qquad\qquad \left. - \int_{|u-a|>\epsilon} du\,\frac{\psi(u,v)}{((u-a)+i(v-b))^2} \right) \\
= & \ \frac{1}{2\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{\psi(u,v)}{((u-a)+i(v-b))^2}\,du\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|\leqslant\epsilon} dv \left(-\frac{\psi(a-\epsilon,v)}{-\epsilon+i(v-b)} + \frac{\psi(a+\epsilon,v)}{\epsilon+i(v-b)} \right).
\end{aligned}
$$

Volledig analoog kunnen we de tweede term uitwerken tot:

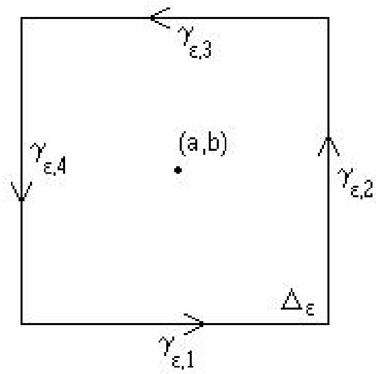
$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{1}{(u-a)+i(v-b)}\,du\,dv \\
= & -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Delta_\epsilon^c} \frac{\psi(u,v)}{((u-a)+i(v-b))^2}\,du\,dv + \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-a|\leqslant\epsilon} du \left(\frac{\psi(u,b-\epsilon)}{(u-a)-i\epsilon} - \frac{\psi(u,b+\epsilon)}{(u-a)+i\epsilon} \right).
\end{aligned}
$$

We vinden dus:

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon(z) \ = \ & \frac{1}{2\pi}\int_{|v-b|\leqslant\epsilon} dv \left(-\frac{\psi(a-\epsilon,v)}{-\epsilon+i(v-b)} + \frac{\psi(a+\epsilon,v)}{\epsilon+i(v-b)} \right) \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-a|\leqslant\epsilon} du \left(\frac{\psi(u,b-\epsilon)}{(u-a)-i\epsilon} - \frac{\psi(u,b+\epsilon)}{(u-a)+i\epsilon} \right).
\end{aligned}
$$

Dit is eigenlijk niets anders dan de contourintegraal over de rand van Δ_ϵ; definieer

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\epsilon,1} &= [a-\epsilon, a+\epsilon] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto t + i(b-\epsilon) \\
\gamma_{\epsilon,2} &= [b-\epsilon, b+\epsilon] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto (a+\epsilon) + it \\
\gamma_{\epsilon,3} &= [-a-\epsilon, -a+\epsilon] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto -t + i(b+\epsilon) \\
\gamma_{\epsilon,4} &= [-b-\epsilon, -b+\epsilon] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto (a-\epsilon) - it \\
\gamma_\epsilon &= \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4,
\end{aligned}
$$



dan is

$$
I_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.
$$

De bewering is dat $\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(z) = \psi(z)$ voor elke $z \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \psi(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{\psi(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{\psi(\zeta) - \psi(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta\in\gamma_\epsilon} |\psi(\zeta) - \psi(z)| \sup_{\zeta\in\gamma_\epsilon} \frac{1}{|\zeta - z|} 8\epsilon \\
&= \frac{4}{\pi} \sup_{\zeta\in\gamma_\epsilon} |\psi(\zeta) - \psi(z)|.
\end{aligned}
$$

Omdat ψ continu is, kunnen we dit laatste willekeurig klein krijgen.

Bibliografie

[1] Agler J & McCarthy JE:
Operators that dominate normal operators,
Journal of operator theory 40 (1998), p.385-407.

[2] Aleman A:
Subnormal operators with compact self-commutator,
Manuscripta mathematica 91/3 (1996), p.353-367.

[3] Alexander H:
On the area of the spectrum of an elemant of a uniform algebra,
in: Complex approximation proceedings, p.3-12.
Birkhäuser, Quebec (1978)

[4] Bram J:
Subnormal operators,
Duke mathematical journal 22 (1955), p.75-98.

[5] Bunce JW & Deddens JA:
On the normal spectrum of a subnormal operator,
Proceedings of the American Mathematical Society 63/1 (1977), p.107-110.

[6] Conway JB:
A course in functional analysis,
(Graduate texts in mathematics 96)
Springer, New York (1985).

[7] Conway JB:
Subnormal operators,
(Research notes in mathematics 25)
Pitman, Londen (1981).

[8] Conway JB:
The theory of subnormal operators,
American Mathematical Society, Providence (1991).

[9] Conway JB:
A course in operator theory,
(Graduate studies in mathematics 21)
American Mathematical Society, s.l. (2000).

[10] Conway JB & Feldman NS:
The essential self-commutator of a subnormal operator,
Proceedings of the American Mathematical Society 125 (1997), p.243-244.

[11] Conway JB & Hadwin DW:
Strong limits of normal operators,
Glasgow mathematical journal 24 (1983), p.93-96.

[12] Conway JB & Olin RF:
A functional calculus for subnormal operators II,
(Memoirs of the American Mathematical Society 184)
American Mathematical Society, Providence (1977).

[13] Curto RE & Putinar M:
Existence of non-subnormal polynomially hyponormal operators,
Bulletin of the American Mathematical Society 25 (1991), p.373-378.

[14] Embry MR:
A generalization of the Halmos-Bram criterion for subnormality,
Acta scientiarum mathematicarum (Szeged) 35 (1973), p.61-64.

[15] Fannes M:
Wiskundige natuurkunde,
Cursusnota's K.U.Leuven (1999).

[16] Feldman NS:
Pure subnormal operators have cyclic adjoints,
Journal of functional analysis 162/2 (1999), p.379-399.

[17] Feldman NS:
Subnormal operators, self-commutators and pseudocontinuations,
Integral equations and operator theory journal 37/4 (2000), p.402-422.

[18] Fillmore PA:
Notes on operator theory,
Van Nostrand Reinhold, New York (1970).

[19] Hadwin DW:
Subnormal operators and the Kaplanski density theorem,
Mathematische annalen 316 (2000), p.201-213.

[20] Hadwin DW & Nordgren E:
Extensions of the Berger-Shaw theorem,
Proceedings of the American Mathematical Society 102/3 (1988), p.517-525.

[21] Halmos PR:
Normal dilatations and extentions of operators,
Summa Brasiliensis mathematicae 2 (1950), p.125-134.

[22] Halmos PR:
A Hilbert space problem book,
Van Nostrand, Princeton (1967).

[23] MacNerney JS:
Hermitian moment sequences,
Transactions of the American Mathematical Society 103 (1962), p.45-81.

[24] Marsden JE & Hoffman MJ:
Internet supplement for Basic complex analysis,
http://www.cds.caltech.edu/~marsden/supplements/BCA_NS.pdf, (1998).

[25] Martin M & Putinar M:
Lectures on hyponormal operators,
(Operator theory: advances and applications 39)
Birkhäuser, Basel (1989).

[26] McCarthy JE & Yang L:
Subnormal operators and quadrature domains,
Advances in mathematics 127/1 (1997), p.52-72.

[27] Olin RF:
Functional relationships between a subnormal operator and its minimal normal extension,
Pacific journal of mathematics 63/1 (1976), p.221-229.

[28] Olin RF & Yang L:
A subnormal operator and its dual,
Canadian journal of mathematics 48/2 (1996), p.381-397.

[29] Quaegebeur J:
Maattheorie,
Cursusnota's K.U.Leuven (1994).

[30] Quaegebeur J:
Operatorentheorie,
Cursusnota's K.U.Leuven (s.d.).

[31] Rudin W:
Real and complex analysis,
McGraw-Hill, s.l. (1974).

[32] Rudol K:
Spectra of subnormal Hardy type operators,
Annales Polonici mathematici 45 (1997), p.213-222.

[33] Saks S:
Theory of the integral,
(Monografie Matematyczne 7)
Stechert, New York (1937).

[34] Stein EM & Weiss G:
Fourier analysis on Euclidean spaces,
Princeton University, Princeton (1971).

[35] Stochel J & Szafraniec FH:
The complex moment problem and subnormality: a polar decomposition approach,
Journal of functional analysis 159 (1998), p.432-491.

[36] Van Daele A:
Complexe Analyse,
Cursusnota's K.U.Leuven (s.d.).

[37] Van Daele A:
Elementen van de topologie,
Cursusnota's K.U.Leuven (1994).

[38] Yoshino T:
Subnormal operators wiht a cyclic vector,
Tohoku mathematical journal 21 (1969), p.47-55.